ciclos na horisfera com os triângulos de rectas no plano euclidiano; como as palavras fonèticamente são diferentes do russo para o português e são, no entanto, *traduzíveis*, sob o ponto de vista das relações com os objectos que descrevem, etc., etc.

Mas é também claro que as noções a substituir não terão no seu sistema métrico o mesmo lugar que têem no seu as noções que as substituem.

Quando digo que a métrica dos horiciclos nas horisferas é euclidiana, traduzo o euclidianismo em hiperbolismo; mas substituo, às noções primitivas da métrica euclidiana, *as rectas* do plano, as noções derivadas de horiciclos na horisfera.

E a primitividade da métrica euclidiana fica mostrando uma superioridade [1], que é a razão da sua preferência.

Superioridade que vai aparecer claramente como sendo sempre nos *casos limites* de simplicidade a forma que se oferece à inserção das novas complexidades determinantes.

É o mais homogéneo de todos os espaços o espaço euclidiano e, por isso mesmo, é que êle é o que aparece imediatamente a oferecer-se às novas determinações da mecânica e da física.

Demonstraremos agora a sua superioridade lógica de máximo de homogeneidade para a seguir mostrarmos como é, com efeito, essa homogeneidade a que se oferece às mais simples determinações da mecânica clássica, complicando-se depois com as novas determinações da física de Einstein, em que sempre se conserva nos casos limites de simplicidade para que foi construído.

1 Já vimos a superioridade experimental do euclidianismo, ou dum não-euclidianismo dele indescernível; a sua superioridade lógica será flagrante, como veremos.

A melhor homogeneidade do espaço euclidiano aparece claramente, quando estudado pela teoria dos grupos de Sophus Lie e Poincaré.

Estudo, aliás, muito interessante, porque permite retomar com o máximo de elegância e harmonia, resumindo-os, todos os problemas anteriormente tratados.

Um conjunto de objectos ou elementos é bem definido sempre que seja possível saber se um dado objecto pertence ou não ao conjunto e se dois objectos dados são idênticos ou distintos.

Dado um conjunto C e uma lei de correspondência de cada elemento c de C a outro elemento c' e fazendo essa correspondência, obtém-se o conjunto C' transformando de C segundo a correspondência (c, c').

Assim, sendo T uma dada transformação, qualquer figura F se transforma em F' e teremos $F' = FT$, F' é a transformada de F pela transformação T.

Duas transformações seguidas (F e S) darão uma nova figura e a transformação semelhante diz-se o produto das transformações elementares.

A transformação inversa de (T) será (T^{-1}), aquela que reproduz a figura primitiva: $F' = FT, F = F'T^{-1}$; $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$.

Um *grupo* é o conjunto de transformações tais que o produto de duas transformações quaisquer do conjunto e as inversas de cada uma delas fazem ainda parte do conjunto.

De modo que num *grupo* passam, ao longo das transformações, propriedades sem mudança: *os grupos têem os seus invariantes.*

Os grupos podem ter *subgrupos* que compreendem *parte* das suas transformações: o grupo g é *subgrupo* *invariante* de G quando é transformado idènticamente pelas transformações de G.

Um grupo é, pois, o sistema de operações, que conservam certas propriedades ou relações dos objectos a que se aplicam.

A lei dessas operações chama-se a sua *estrutura*.

Quanto à estrutura podem os grupos ser contínuos ou discontínuos.

Trataremos só dos primeiros, que podem, consoante as novas variáveis, funções das primitivas, são funções de números finitos ou infinitos de parâmetros, ser ainda grupos contínuos finitos ou infinitos.

A métrica geométrica é o estudo dum grupo contínuo finito, que, em breve, analisaremos.

Cada geometria será o estudo das propriedades que permanecem (*os invariantes*) num *certo grupo* de transformações.

Desde logo aparece viável a escolha de grupos tais que uns abranjam os outros, isto é, desde os grupos menos extensos e mais compreensivos, ou particulares, até ao mais extenso e menos compreensivo de todos ou seja ao mais geral.

Assim para as geometrias, se a *métrica* é a geometria de maior determinação, deverá o seu grupo ser o mais rico de invariantes ou mais compreensivo e o menos extenso, pois uma simples relação de ordem é compreendida pela métrica, e esta relação de ordem estende-se sôbre aquelas relações métricas.

As *propriedades características* duma geometria são aquelas que só pertencem a esta geometria e não fazem parte das propriedades das figuras pertencentes a geometrias mais gerais.

O *grupo fundamental* será aquele que só conserve as *propriedades características:* é possível estabelecer uma subordinação de gupos, ou de geometrias, vindo da mais geral e simples ordenação da *Analysis Situs*, até às tres métricas [1] geométricas.

A subordinação dos grupos permite passar duma geometria mais particular para outra mais geral pelo acréscimo de condições a esta.

É assim que Klein acha que é sempre possível substituir um grupo fundamental *g* por um grupo mais extenso *G*.

Então só parte das propriedades de *G* são conservadas, mas as outras podem introduzir-se como *invariantes*, para o grupo *G*, do sistema formado juntando aos pontos do espaço uma figura para a qual as transformações de *G*, que a transformam idènticamente, são as transformações do grupo fundamental *g*.

Foi assim que Klein, sistematizando os trabalhos de Cayley, mostrou como se podiam obter os grupos métricos a partir do *g* projectivo, pela especial junção das condições do *Absoluto*, dando a célebre interpretação métrico-projectiva das métricas não-euclidianas e demonstrando a redução a tres espécies de todas as métricas possíveis, como já vimos.

Mas, não será sòmente possível uma lógica classificação hierárquica das diferentes geometrias pela teoria dos grupos, imediatamente se vê também o carácter aqui múlti-uno das relações do nosso espírito com a realidade.

Se, com efeito, uma geometria é apenas o estudo dos invariantes dum *grupo fundamental*, resta saber se esse grupo fundamental tem uma única determinação.

Ora é claro que nós poderemos sempre substituir ao grupo *G* um grupo *G'*, desde que os façamos corresponder, biùnìvocamente, isto é, a cada operação dos elementos do conjunto próprio de cada grupo uma

1 Já vimos que, por exemplo, era possível estabelecer a geometria projectiva sem a noção métrica de distância.

operação do outro e ao produto de duas operações do primeiro o produto das correspondentes do outro.

Os dois grupos terão a mesma estrutura e serão *isomórficos*.

Assim duas geometrias [1] serão equivalentes sempre que se exprimam por dois grupos fundamentais isomórficos.

E, como conseqüência, o princípio de Plücker: podemos considerar, indiferentemente, como elementos geradores do espaço duma geometria, certas figuras, *um corpo*, com a condição de que estas figuras se transformem entre si pelas transformações do *grupo fundamental* e que não exista no grupo fundamental mais nenhuma transformação, fora a transformação idêntica, deixando invariantes as figuras do corpo.

O princípio de Plücker permite substituir os elementos por outros: o ponto, por exemplo, pela recta — sòmente o espaço teria então quatro dimensões [2], pois, são quatro as coordenadas, que definem a recta do espaço.

A existência de grupos *isomórficos* permite expressões variáveis, linguagens diversas dentro do respeito dos *invariantes* dos grupos fundamentais.

Foi o estudo dos grupos isomórficos que lembrou a Poincaré a teoria do dicionário, é a existência do isomorfismo que justifica as traduções das métricas entre si, como as que já apontamos e como as célebres traduções de Poincaré [3].

1 Onde se diz geometrias, diz-se qualquer sciência redutível ao estudo dum grupo: e é o ideal de todas — para onde tendem.

2 É claro que quando procuramos saber o número de dimensões do espaço, procuramos o mínimo e estas transformações não resolvem o problema.

3 Vêr a sua obra filosófica e um prefácio ao «Tratado de Geometria» de Rouché e Comberousse.

Vejamos agora o aspecto das tres métricas em relação à teoria dos grupos.

Claro está que todos os grupos métricos terão de conservar invariante a *distância*, mas êles irão evidentemente diferir na medida dessa distância ou na forma do seu invariante.

Sophus Lie, partindo duma variedade numérica a tres dimensões e de deslocamentos quaisquer numa região finita dessa variedade, põe os seguintes axiomas fundamentais:

O espaço é uma variedade numérica de tres dimensões, onde é possível um sistema de coordenadas; os deslocamentos (sem deformação, é claro) são transformações dum grupo real e contínuo compreendendo as transformações inversas das suas; fixando arbitràriamente um ponto (y_1^0, y_2^0, y_3^0) as coordenadas (x_1, x_2, x_3) dos pontos com os quais um ponto (x_1^0, x_2^0, x_3^0) pode ser levado a coincidir devem satisfazer à condição:

$$\Omega\ (x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, x_1, x_2, x_3) = 0;$$

em volta do ponto (y_1^0, y_2^0, y_3^0) existe uma região finita triplamente extensa tal que, sendo fixo o ponto (y_1^0, y_2^0, y_3^0), o ponto (x_1^0, x_2^0, x_3^0) possa ser deslocado até um ponto tal que para as suas coordenadas seja $\Omega = 0$.

Êste sistema de axiomas caracteriza os grupos contínuos de transformações projectivas (e isomórficas) referidos a uma quádrica ordinária ou degenerada e que são os grupos métricos.

São propriedades comuns dos grupos métricos: a existência duma infinidade de transformações levando qualquer ponto A a qualquer posição A'; não existe em geral transformação que leve ao mesmo tempo *A* e *B* a *A'* e *B'*, para isso é preciso que a *distância*[1] de *A* e *B* seja análoga à de *A'* e *B'*; se existe esta transformação, há uma infinidade delas, e, em *particular*, existe uma infinidade deixando fixos os pontos *A* e *B*; cada um dêstes deslocamentos deixará fixos os pontos duma infinidade, formando uma linha, que é a *linha principal* relativa ao grupo, etc.

Estas propriedades pertencem em comum às tres métricas, mas a métrica euclidiana vai separar-se por uma propriedade *específica* que vem a ser exactamente *a da máxima homogeneidade ao mesmo tempo que é quási uma oferta da experiência.*

O axioma suplementar que *específica* a métrica euclidiana é êste: *existem neste grupo deslocamentos tais que cada ponto do espaço descreve uma linha principal relativa ao grupo.*

Sob o ponto de vista lógico esta propriedade dá-nos evidentemente a métrica euclidiana trabalhando com um espaço mais homogéneo que as outras.

O que há de comum em todas é a existência de deslocamentos sem deformação, seja, do *invariante distância:* o espaço de todas as métricas é isógeno[2].

Mas nem todos os pontos do espaço podem jàmais considerar-se em *identidade* para um deslocamento a não ser na métrica euclidiana em que há *deslocamentos em que todos os pontos do espaço descrevem linhas principais:* o espaço euclidiano *não é apenas isógeno é homogéneo.*

Eis a sua especialidade lógica de melhor homogeneidade.

Esta propriedade pode substituir-se por esta outra

1 Não definida ainda, é claro, mais que como função de *A* e *B*, e de *A'* e *B'*.

2 Terminologia de Delboeuf.

de o deslocamento euclidiano ser um subgrupo invariante do grupo das semelhanças ou ainda ter como subgrupo invariante o grupo das translações.

Poincaré mostrou como a existência dos subgrupos rotativos, que também caracteriza os deslocamentos euclidianos, é solicitada pela experiência.

É, com efeito, uma imediata sugestão da experiência a existência dos subgrupos rotativos, e isto explica que o espaço euclidiano, o mais homogéneo, fôsse também escolhido como o mais próximo do mínimo de experiência.

Nele se dá, com efeito, o melhor equilíbrio entre a perfeita certeza condicional e a melhor verdade como resultante daquela certeza sôbre o melhor (lògicamente) condicionalismo da experiência.

Igualmente vamos encontrar o nosso critério de certeza e verdade dominando a actividade scientífica dos físicos, mostrando a física moderna como o procura dos grupos que deem certos *invariantes*, de que os grupos clássicos não são mais que a forma degenerada ou simples do limite.

A física moderna, sob êste ponto de vista, aparece até como uma superior organização da geometria.

A geometria do espaço físico é que vamos agora estudar, nela aparecendo, então, as complicações que, *informando*, porventura revelem o espaço euclidiano como uma primeira aproximação ideal no máximo de homogeneidade e no mínimo de experiência.

Se o espaço riemaniano é o menos homogéneo, será, com efeito, um espaço como que super-riemaniano o que iremos encontrar a definir o espaço físico.

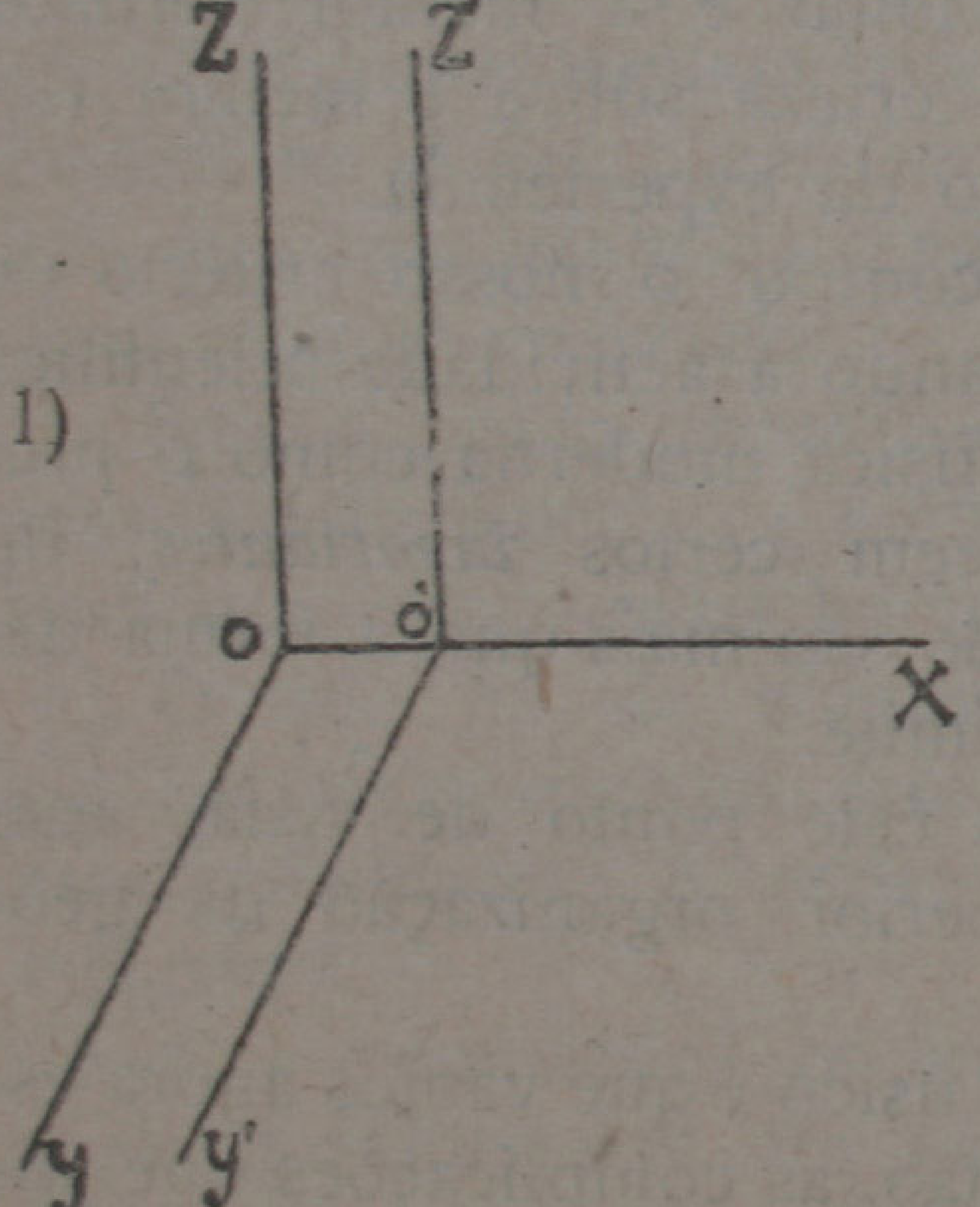
AS TEORIAS DA RELATIVIDADE:

A RELATIVIDADE RESTRITA

A mecânica clássica toma a velocidade como o mais simples elemento e de suas variações resultam as qualidades específicas do movimento: daí o papel notável da aceleração em todo o campo da velha teorização mecânica.

Se, com efeito, partimos do repouso, a primeira modificação dêste homogéneo é a velocidade, que será simples ou se oferecerá como novo homogéneo às novas complicações da aceleração.

1)



Mas o *repouso* é relativo, e partir dêle é um arbitrário início só justificável pelo pragmatismo natural do conhecimento: andando para crescer, conhecendo para melhor conhecer no ajuste e na fecundidade das conseqüências.

Assim é que, de pronto, nos aparece, na relatividade do repouso ou movimento, um novo homogéneo a oferecer-se ao determinismo do conhecimento: o do movimento de translação uniforme.

Temos as leis do movimento, marcando os *invariantes* em relação a um sistema de referência em repouso, deslocamos o sistema com o movimento mais homogéneo que por nós é concebível e verificamos que juntando à primeira determinação a nova determinação, que resulta dêste homogéneo deslocamento, os *invariantes* permanecem, isto é, as leis dos fenómenos *conservam* a mesma *forma*.

É o caso, reduzido à mais simples forma, do deslocamento (1) do sistema de eixos de $ZOXY$ para $Z'O'XY'$ em movimento uniforme de translação segundo OX, com a velocidade v.

As equações fundamentais da dinâmica, ou de Mac-Laurin, *conservam* a *forma*. Com efeito, elas eram no primeiro sistema

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z:$$

sendo X, Y, Z as componentes da fôrça segundo os eixos.

Elas serão no segundo sistema, *aplicando* as fórmulas de transformação, *grupo Galileu*,

$$x' = x - vt, \; y' = y, \; z' = z:$$

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = X', \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = Y', \quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = Z'$$

com X', Y', Z' componentes da fôrça, segundo os novos eixos.

Quere dizer que a *mecânica* é a *mesma* para sistemas de observadores em translação uniforme uns em relação aos outros.

E, andando, caminhou-se sem dúvidas, porque o homem é mais feito de crença e conformismo que descrença e invenção.

Ninguém se lembrou de estudar o significado daquele v, de preguntar se os seus processos de medida legitimavam a simplicidade com que era tratado.

Crentes na realidade do sólido rígido e indeformável, os físicos não duvidaram da transmissão instantânea de abalos do repouso, seja da possibilidade física de uma velocidade infinita.

E assim não seria de admirar que a realidade da experiência desmentindo o vago de suas abstracções, dando-lhe o correctivo de uma *velòcidade limite*, viesse mostrar como o grupo de Galileu e seus invariantes são apenas aproximações felizes, do grau de felicidade dependente da pequenez das velocidades estudadas em relação àquele *limite*.

Essa velocidade limite é a velocidade da luz: 300.000 quil. por segundo; imensa, com efeito, em relação às velocidades da mecânica clássica — como que fazendo o papel de infinita.

Mas, se as medidas da mecânica não atingem precisões assustadoras, nem as suas velocidades se aproximam da da luz, outro tanto não acontece com a electro-magnética (incluindo a óptica), quer na precisão, quer nas velocidades das partículas ou das pulsações radiantes.

Se, pois, a velocidade da luz é um limite, de esperar seria que por fenómenos electro-magnéticos nos viesse a ser revelada a impropriedade do grupo de Galileu e seus invariantes, mantidos aliás como uma primeira aproximação mecânica.

E assim acontecia com as experiências Kaufman, etc., chegando à variação da massa com a velocidade:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sendo m_0 a massa em repouso, v a velocidade da partícula e c a velocidade da luz.

Por seu lado, *Lorentz*, vendo que as equações de Maxwell são precisas e exactas para uma modificação uniforme de sistema de referência, mostra que isso contraria o grupo de Galileu, que aplicado a estas leis lhes não *conservaria* a *forma* e acha o *seu* grupo, que é, para a transferência (1):

$$x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt),\ y' = y',\ z' = z,\ t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \qquad \text{(A)}$$

com

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Grupo que *conserva* as leis da electro-magnética e dá, como caso particular e aproximação para velocidades muito pequenas em relação à da luz, o próprio grupo de Galileu, como é óbvio.

Seria, portanto, êste o melhor grupo; êle, com efeito, vai gozar de uma elegância e felicidade notáveis.

O grupo clássico dava o princípio da relatividade de Newton, mostrando impossível a descoberta de um movimento uniforme de translação dum sistema por experiências internas a êsse sistema.

No entanto os físicos para a explicação dos fenómenos ópticos, elétricos, etc., tinham repassado o espaço de *éter*, e natural era que, se êsse *éter* não acompanha a terra em seu movimento de translação, êste podesse ser revelado por experiências referentes ao éter.

Foi o que, com efeito, tentou Michelson e outros na célebre experiência duma plataforma móvel sustentando dois braços rectangulares, recebendo dois raios luminosos da mesma fonte, que, interferindo, devem dar riscas diferentes conforme as duas posições rectangulares que ocupem.

O cálculo mostra que o fenómeno cai dentro, e muito dentro, dos limites da observação; e, no entanto, nada se conseguiu observar.

As experiências variaram e sempre com os mesmos resultados negativos: *não foi possível* revelar o movimento de translação da terra em relação ao éter.

Parece que dois caminheiros, os raios luminosos, devendo andar com velocidades diferentes o mesmo caminho, chegam ao mesmo tempo. Aqui aparece o singularíssimo comportamento da *velocidade* da luz, apontando uma radical reforma da cinemática.

E Lorentz dirá: é que, aplicando as minhas fórmulas de transformação (A), um caminheiro andou diferente caminho, pois os corpos se encurtam no sentido do movimento.

E encontra-se a notável coincidência do *grupo Lorentz* dos fenómenos electro-magnéticos vir explicar perfeitamente a falência das experiências Michelson, Morley e Miller.

A contracção é real?

É a mesma para todos os corpos e é recíproca: quere dizer que dois sistemas S e S' contam recíprocas contracções dos objectos que em relação a cada um vão no sentido do movimento.

Parece, pois, que resulta apenas da maneira como temos de medir.

A relatividade foi mais longe que em Newton e verifica-se para a terra em relação ao éter.

Einstein vai generalizar com a larga audácia do inovador. Einstein não dirá «não foi possível...»; Einstein não dirá que os caminhos ou as velocidades são diferentes. Mas dirá que «não é possivel...» e que a velocidade da luz «se não compõe» com as outras velocidades, mas é sempre a mesma.

E é, partindo dêstes dois princípios ou postulados, sugeridos pela experiência, que vai construir a sua teoria de *relatividade restrita*, isto é, *sem gravitação*, cujas previsões a experiência irá confirmar brilhantìssimamente. Os *dois postulados* são, pois, e para sistemas em translação uniforme uns em relação aos outros: *a propagação isótropa da luz em todas as direcções e a identidade de forma das leis dos fenómenos físicos.*

É a opção pela electro-magnética, incorporando como caso particular a mecânica clássica, sua primeira aproximação.

A mecânica clássica era a síntese dum certo espaço e dum certo tempo: com efeito é o movimento o assunto dessa mecânica. Êsse espaço é o que resulta da concepção do sólido rígido e indeformável, é o espaço euclidiano; êsse tempo, resultando ainda da propagação instantânea feita por aqueles sólidos, é uniforme e absoluto, é o tempo galileano.

Os invariantes fundamentais são, pois, a *distância* e o *tempo.*

Nestes invariantes galileanos havia, no entanto, uma curiosa dissimetria: a distância só é a mesma para os observadores para quem os *acontecimentos* são *simultâneos;* o tempo é sempre e absolutamente o mesmo para todos os observadores. Já veremos como as novas concepções não recebem tal singularidade nem o absoluto do tempo [1].

Se, com efeito, existe uma velocidade infinita, os acontecimentos podem escalonar-se para todos os observadores sôbre uma recta onde cada acontecimento-causa precede imediatamente o acontecimento-

1 Êste tempo foi tão longe na exaustão do concreto que, fora da sciência, dá lugar à crítica de Zenon de Eleia e modernamente de Bergson: esvaziou-se de *duração,* que é o dado experimental.

-efeito: *o universo é um sincrônico pestanejar de instantes.*

Há simultaneidades absolutas, para as quais é sempre possível um corte no movimento, que dará a visão euclidiana do espaço.

Mas, se não existe uma propagação instantânea por não haver uma velocidade infinita, os cortes do espaço são relativos às simultaneidades de cada observador e o verdadeiro invariante não é a distância do espaço nem o absoluto intervalo de tempo, mas a sua síntese, que se chama *distância* de dois *acontecimentos;* e o *espaço* e o *tempo* serão, levantando a dissimetria de Galileu, igualmente *relativos* ao observador.

Com efeito do grupo Lorentz:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\alpha}(x_2 - x_1) - \frac{1}{\alpha} v(t_2 - t_1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\alpha}(t_2 - t_1) - \frac{1}{\alpha}\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1),$$

sendo os xx e os tt as coordenadas dos dois acontecimentos nos dois sistemas.

Para

$$t_1 = t_2 \text{ não teremos } t'_2 = t'_1$$

o que retira o absoluto da simultaneidade; para

$$t_1 = t_2 \text{ e } x_1 = x_2,$$

teremos

$$t'_1 = t'_2 \text{ e } x'_1 = x'_2$$

a coincidência dos acontecimentos.

O espaço e o tempo da nova mecânica são, pois, diferentes do espaço euclidiano e do tempo galileano: à linha rígida indeformável substituiu-se a *distância contráctil,* ao tempo *único* e absoluto o *tempo local.*

O *invariante* é agora a distância de dois acontecimentos do Universo de Minkowski, que é o conjunto de todos os acontecimentos.

É da forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2\,.$$

Na mecânica clássica supunha-se que, pelo absoluto do tempo, era possível desenlear, no *acontecimento*, os fios do espaço dos fios do tempo; aqui sabe-se que tal desunião é sempre relativa a cada observador e só os seus *nós*, ou os acontecimentos, fornecem, por suas relações, o *invariante* para todos os observadores e em relação ao grupo de transformações Lorentz.

E tudo resulta da *impossibilidade* física de velocidades superiores à da luz: se, com efeito, pudéssemos *desenlear* o espaço do tempo no acontecimento, dando um espaço euclidiano e um tempo galileano, a velocidade da luz teria sido *composta* com outras velocidades, o que é contra as experiências Michelson-Morley ou contra um dos postulados de Einstein.

O Universo de Minkowski compõe-se de acontecimentos — o *here and now* de Eddington, o *event* de Whitehead.

Tais acontecimentos podem agrupar-se, por dois, em pares, gozando de notáveis propriedades.

Seguindo uma comunicação de Langevin, já no livro «O Criacionismo» estudamos, em 1912, êstes acontecimentos, cujos grupos são: pares de acontecimentos no espaço, pares de acontecimentos no tempo e acontecimentos coincidentes.

Se ds^2 é *negativo*, e escrevendo o *invariante* com a forma

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2$$

sendo

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

o intervalo no espaço é maior que o caminho percorrido pela luz no intervalo de tempo e os dois acontecimentos não tem uma ordem de sucessão bem determinada, mas variável com os sistemas de referência.

Os dois acontecimentos devem ser independentes, sob pena de reversibilidade possível das relações de causa e efeito, consoante os observadores.

A distância no espaço dêstes acontecimentos é *mínima* para o sistema em que êles forem *simultâneos*.

Se ds^2 *é positivo*, dl é sempre menor que cdt e a ordem de sucessão dos acontecimentos é bem determinada.

A sua distância no tempo é mínima para o sistema em que êles coincidam no espaço.

Se

$$dl^2 = c^2\, dt^2 \,,$$

para dois pontos do Universo dum raio luminoso, por exemplo, os acontecimentos são sempre em coincidência.

Eis uma interessante classificação dos acontecimentos no Universo de Minkowski.

Nesse Universo, e dados dois sistemas, S e S', em translação uniforme, teremos a reciprocidade de contracções do espaço e dilatações do tempo,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,,$$

que resultam do grupo Lorentz.

Mas vai-nos aparecer uma conseqüência mais curiosa e desconcertante para nossos revelhos hábitos mentais, que é uma singular propriedade do Universo de Minkowski: é a noção do *tempo próprio*, para a qual não há reciprocidade.

O conjunto de acontecimentos duma dada porção de matéria é a sua *linha de Universo*.

Para uma linha de Universo e acontecimentos infinitamente próximos é invariante a expressão:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dl^2\,;$$

e num sistema ligado a esta matéria

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2\,, \qquad (2)$$

onde $d\tau$ é o *elemento* de *tempo próprio*.

Integrando teremos o tempo próprio entre dois acontecimentos quaisquer, e que será *independente de todo e qualquer sistema de referência*.

Suponhamos um sistema S em translação uniforme, a terra por exemplo, e um móvel com a velocidade v em relação a S: seja um projétil à J. Verne ou à Wells chocando um astro e regressando à Terra.

Teremos os dois acontecimentos A e B, partida e chegada, de S e da linha de Universo [1] do projétil.

Para esta teremos:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

e, por (2),

$$ds = c\,d\tau, \text{ donde } ds = \alpha c\,dt \text{ e } d\tau = \alpha\,dt,$$

que mostra o crescimento do *tempo próprio* do projétil com a sua velocidade v em relação a S.

Sempre que um relógio recebe acelerações dentro dum ciclo, êle regressará atrasado.

Um corpo que se deslocasse com a velocidade da luz não contaria o tempo:

1 Há aqui uma comparação entre duas linhas de Universo diferentes, mas coincidentes nos extremos: o que permite a avaliação dum tempo pelo outro como função do estado do movimento de cada sistema.

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}\, dt = 0,$$

seria, pois, imortal.

Para o nosso exemplo, de Langevin, um projéctil, partido com uma velocidade diferindo da luz de $\frac{1}{20000}$, chegaria em dois anos, tendo a terra vivido no intervalo *200* anos da sua carreira. Note-se que estas conseqüências não são meras relações de unidades métricas, como pretendeu Guillaume, mas conseqüências respeitantes à estrutura electro-magnética da matéria e deduzidas da *conservação* das equações de Maxwell pelo grupo Lorentz.

Uma amostra de *rádio* que sofresse a viagem voltaria, com efeito, menos evoluída que estaria idêntica amostra deixada na terra.

Conseqüências desconcertantes, mas experimentais e teòricamente experimentáveis.

E não há reciprocidade da terra para o projéctil, pois que não é aplicável o mesmo raciocínio, porque o projéctil, regressando, sofreu acelerações.

A água da juventude descoberta: correi como a luz, sêde a própria luz cinturando os mundos, e depois deles mortos sereis ainda um eterno abraço de luz!

Estudamos em linhas gerais a geometria quadridimensional do Universo físico. Vimos o novo *invariante* e seu *grupo*, a maneira *relativa* de desfazer para cada observador o *nó* do invariante, deslaçando um *espaço* e um *tempo* especiais.

Percorremos os contornos de uma nova mecânica de que a velha mecânica clássica apareceu como um caso particular de legítima e primeira aproximação.

Vamos vêr agora, e para resumir a teoria da relatividade restrita, as mais notáveis modificações da velha cinemátiea e da velha dinámica e as conseqüências experimentais dessas modificações.

CINEMÁTICA: Das fórmulas de Lorentz saiem imediatamente, por derivação, as fórmulas das componentes da velocidade segundo os eixos:

$$V_x = \frac{v + v'_x}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}, \quad V_y = \alpha \frac{v'_y}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}, \quad V_z = \alpha \frac{v'_z}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}$$

e, em particular, quando v' paralela a v, teremos

$$V = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{c^2}}.$$

Esta fórmula mostra bem o carácter limite da velocidade da luz. Supondo, com efeito, uma das componentes igual a c, seja qual fôr a outra, a soma resultante será sempre c; supondo ambas as componentes com o valor c, a resultante será ainda c: supondo que cada uma difere muito pouco de c, a sua soma, de quantidades diferindo ambas muito pouco de c, é sempre menor que c.

Eis o carácter original desta cinemática:

$$V = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c, \qquad V = \frac{c + v'}{\frac{c^2 + c v'}{c^2}} = c$$

e, pondo $v = (1 - \alpha) c$, $v' = (1 - \alpha') c$, sendo α e α' fracções tão pequenas quanto quisermos:

$$V = \frac{2 - \alpha - \alpha'}{2 - \alpha - \alpha' + \alpha \alpha'} c \text{ que é menor que } c.$$

DINÁMICA: Aplicando às equações de Mac-Laurin as transformações do grupo Lorentz para os sistemas S e S' já estudados, as transformações de

$$m_0 \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F'_{x'}, \text{ etc.},$$

serão:

$$\frac{m_0}{\alpha^3} \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad \frac{m_0}{\alpha} \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad \frac{m_0}{\alpha} \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z,$$

onde m_0 é a massa do ponto em repouso.

Vemos que não só a massa depende da velocidade, mas até da direcção longitudinal ou transversal, como experimentalmente já se tinha verificado para as emissões rádio-activas.

Mas o mais curioso é, conseqüência imediata das equações anteriores, a proporcionalidade entre a variação da massa e a da energia cinética, dando por integração, escolha de unidides e definição de massa:

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\alpha} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots,$$

cujo primeiro termo revela a formidável energia dum corpo em repouso, e os outros dão a energia cinética crescendo indefenidamente com v.

O primeiro termo é o armazem de energia interna dos núcleos atómicos, chegando um grama de matéria para erguer 30 milhões de toneladas ao cimo da tôrre Eiffel [1].

1 Becquerel.

O segundo é o termo que a mecânica clássica aproveitava, pois os outros são pequenos para *vv* muito longe da velocidade da luz.

Eis as conseqüências mais interessantes da nova teoria e que em suas verificações experimentais se mostra como tendo penetrado na intimidade do átomo, nos arcanos da estrutura electro-magnética da matéria.

É como uma visão microscópica da matéria, que a mecânica clássica tinha abordado em visão macroscópica, global e grosseira.

Dotando a energia de inércia, identificando aquela com a massa, prepara para a brilhante demonstração quantitativa do *pêso* da luz, que as novas determinações introduzidas pelo campo gravífico vão com singular felicidade calcular e prevêr.

Achamos o grupo (Lorentz) para que as leis dos fenómenos físicos conservem a sua *forma* para sistemas em movimento rectilíneo e uniforme uns em relação aos outros.

Ficaremos dentro dêsses limites?

E podemos nós distinguir a imobilidade, do movimento uniforme e rectilíneo?

O que nós simplesmente podemos afirmar é que da existência dum sistema galileano, onde se aplique o princípio da inércia de Galileu, se conclui a existência de indefinidos sistemas da mesma família.

O Universo físico de sistemas galileanos não é um Sistema, mas uma possibilidade aberta à inserção desses sistemas: qualquer coisa como a matéria da sciência no sentido aristotélico do termo.

Por isso êsse Universo é infinito e homogéneo: infinito (indefinido é que é) para não pôr limites a todas as possíveis *determinações;* homogéneo para receber qualquer *forma* dessas determinações, pois que o mínimo de heterogéneo lhe daria uma estrutura que poderia impossibilitar a *nova* forma a inserir.

É, de resto, o significado profundo do problema do finito e do infinito, nos períodos históricos de crise do pensamento scientífico.

O cosmos começa por ser o indeterminado a *informar*, a *matéria* a receber a *forma*, e nêste momento é *homogéneo* e *indefinido;* depois vai-se heterogenizando e recebendo determinações até que adquire uma dada forma e um certo limite: pre-helénico, ptolomaico a ilimitar-se com Copérnico, Giordano Bruno e modernos, até que as novas determinações sobem, com Einstein e sequazes, à nova estrutura que lhe dá uma certa *forma* e portanto o *limita.*

Em linguagem geométrica: é, do mais homogéneo ao mais determinado ou heterogéneo, como já vimos, o caminho de Euclides a Gauss, Riemann e Weyl.

O *método* da teoria da relatividade, verêmos posteriormente, é gnoseològicamente o mesmo que os métodos anteriores: não é mais que a partida dos *casos límites*, onde, degenerando, morrem as *diferenciações* e as *formas*, para, subindo, marcharem de complicação em complicação, introduzindo o *diverso* até à mais completa *informação* acessível pela sciência actual.

O Universo físico de Minkowski (da teoria restrita) é, no caso, êsse mínimo, onde se inserem os sistemas galileanos.

¿Mas não serão êsses sistemas apenas *casos limites*, degenerescências dum Universo *estruturado*, fibroso, arquitectural?

Partidos do *homogéneo* informe para o *organizado*, ¿não poderemos agora descer dêste *organizado* para aquele *homogéneo?*

Eis o caminho de Einstein.

Êle vai procurar a estrutura do Universo físico para que a relatividade seja geral (o princípio da relatividade é o fio condutor) e encontrará um Universo arquitecturado pela gravitação e pelo electromagnetismo, de que o Universo *homogéneo* e *infinito* (indefinido) com sistemas galileanos é: quanto a êstes, a degenerescência; quanto ao seu carácter de infinito e homogéneo, a invasão do *indeterminismo*, que êstes exigem para suas indefinidas inserções possíveis.

Repare-se, desde já, que o princípio da relatividade não é de forma alguma, como o nome pode sugerir, um princípio de indiferenciação, mas sim um princípio de máxima objectivação, postulando um *real* impondo-se a todos os observadores: a redução do homem a simples instrumento registador.

A RELATIVIDADE GENERALIZADA

A ideia genial de Einstein consistiu em reduzir as fôrças de gravitação a fôrças de inércia, de modo que o Universo einsteiniano é a complicação mais alta, a forma mais completa e definida da inércia: a inércia de Galileu substituída por uma nova e mais completa inércia. E, se a inércia de Galileu é o comportamento euclidiano do *ponto-partícula*, a inércia de Einstein será o comportamento super-riemanniano dêsse mesmo ponto.

Para certas condições simplificadoras é, com efeito, igual supôrmos um sistema com *certo* movimento ascendente, ou supô-lo, *estático*, num *certo* campo de gravitação.

O princípio da relatividade, recebendo o auxílio dêste novo *princípio de equivalência*, vai generalizar-se procurando, em qualquer campo de gravitação, *invariantes* para qualquer sistema de coordenadas, acabando com a existência de observadores privilegiados.

Desde logo, e até como simples aplicação da relatividade restrita a um campo de gravitação, e por virtude do princípio de equivalência, nos é impossível definir um tempo aplicável a todo o campo e um espaço cuja métrica seja euclidiana.

Mas, não havendo, na interpretação de Einstein, fôrças atractivas, sendo os campos gravíficos devidos a simples fôrças de inércia, é claro que o que interessa é a geometria dos movimentos dos corpos, as suas *linhas de Universo*.

É, portanto, um estudo geométrico que teremos de fazer para o que havia a preparação anterior dos trabalhos de Gauss, estudando a geometria de certos espaços em si, sem referência a um espaço superior envolvente nem a qualquer *especial* sistema de coordenadas.

Assim Gauss encontrava uma distância elementar,

$$dl^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{21}\,dx_2\,dx_1 + g_{22}\,dx_2^2,$$

de cuja integração saía a noção de linha e que, pela condição do mínimo, dava a *geodésica* da superfície, e encontrava também uma característica de cada superfície, um invariante, a sua curvatura total, função dos *gg* e suas primeiras e segundas derivadas.

Generalizando para uma multiplicidade a quatro dimensões teríamos

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots\ldots + g_{44}\,dx_4^2,$$

onde, é claro, os *gg*, que se chamam potenciais de gravitação, são funções dos *xx* e variam com a escolha do sistema de coordenadas.

Mas, se existe uma certa estrutura do Universo, a variação dos *gg* com as coordenadas não pode ser qualquer e existirão equações ligando os *gg* entre si, que devem ter a forma especial (independência dos sistemas de eixos) que pela teoria da relatividade devem ter todos as leis naturais: *a forma tensorial.*

A propriedade característica dos tensores consiste, com efeito, em que a igualdade ou a anulação dos componentes de dois tensores uma vez dada para um sistema de coordenadas é obrigatória para todos os sistemas.

As relações tensoriais entre os *gg* constituem, pois, a *revelação* das linhas de Universo, isto é, da estrutura da geometria a quatro dimensões do Universo gravífico: *a própria lei da gravitação.*

A diferença da lei de Einstein aparece já nêste característico a que a obriga o método da relatividade, de ter a *forma tensorial,* o que não acontece evidentemente com a de Newton.

A lei de Newton tinha já perdido, em face da teoria da relatividade restrita, parte do seu valor pelo indeterminismo em que ficava, pois, exprimindo as fôrças em função das massas e das distâncias, postulava, é claro, estas como *invariantes.*

Ora já vimos que nem a massa, nem a distância, são invariantes — o que é bastante a exigir novas determinações na lei de Newton.

Veremos depois as diferenças quantitativas, mostrando a lei newtoniana como uma primeira aproximação da verdadeira lei gravífica. É claro aqui, nesta substituïção da física pela geometria, que, se novas determinações, por exemplo electro-magnéticas, entrarem a organizar o espaço-tempo, êste se complicará duma superior organização e que novas *linhas de Universo* ou *caminhos da inércia* irão sulcar a multiplicidade que definem.

¿Como resolve Einstein o formidável problema de achar as relações tensoriais ligando os *gg?*

Procurando as condições para que, a uma distância infinita da matéria ou energia, o Espaço-Tempo seja euclidiano, quere dizer, receba a lei da inércia de Galileu; procurando que a lei da conservação da impulsão e da energia, na sua maior generalidade tensorial, seja satisfeita.

Estas condições equivalem à admissão duma lei de inércia (Galileu) que é a tradução duma certa geometria a quatro dimensões, abstracta, de *casos limites, degenerescência* duma outra mais orgânica ou menos abstracta, onde uma nova lei de inércia marca a estrutura das linhas (espaço-tempo) dos acontecimentos: à geodésica limite, ideal e simples, substituída a geodésica real de menor homogeneidade [1].

Einstein encontra já um magnífico algoritmo matemático, a teoria dos tensores, que vai servir a dar a forma desejada à teorização do físico.

Os grupos de quantidades, que se *transformam* segundo certas leis, constituem pelo número dessas quantidades e pela *forma* destas leis os *tensores* de várias ordens e caracteres.

Interessam agora principalmente os tensores de primeira *ordem*, quadrivectores, e com os *caracteres* de *contravariação* e *covariação*.

Dêstes dois tensores, contravariante e covariantes, deduz-se, por operações simples, a existência dum tensor de ordem nula, que é um *invariante* ou escalar, e certas regras para a determinação dos tensores.

Da expressão do invariante

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu},$$

aplicando as regras do algoritmo tensorial e duma

1 Diferença análoga à que anteriormente vimos haver entre a recta euclidiana e outra qualquer dentro da teoria dos grupos de Sophus Lie.

nova derivação deduz-se, por dx_μ ser um tensor de primeira ordem covariante arbitrário, que $g_{\mu\nu}$ é também um tensor covariante.

Dêste tensor, que chamaremos fundamental, se pode deduzir o contravariante fundamental e o mixto fundamental; assim teremos os tres tensores fundamentais:

$$g_{\mu\nu},\ g^{(\mu\nu)},\ g_\mu^\nu.$$

Por intermédio dos símbolos de Christoffel dêste algoritmo, foi possível introduzir a nova noção de derivação covariante de que a derivação clássica é um caso particular, *ainda um caso limite.*

Com estas noções é possível construir, por uma série de operações próprias dêste algoritmo, uma expressão que é um tensor, a que Einstein chama o tensor de Riemann-Christoffel, e que se exprime na simbólica que resume o grupo das operações construtoras pela forma $G^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$.

Êste tensor goza de propriedade de que a sua anulação arrasta a anulação da curvatura (linguagem de Gauss) da forma quadrática fundamental — o que significa a anulação do campo gravífico, ou seja, na física da relatividade, a passagem ao *caso limite* da relatividade restrita.

Mas os simples movimentos dos astros nos mostram que as condições dos *gg* num campo gravífico sem matéria devem ser mais gerais que os dados pela anulação do tensor Riemann-Cristoffel, se devem realizar com êstes e devem ser *invariantes*, isto é, de forma tensorial.

Einstein adoptou, como tais, as equações que resultam de *anular* o *tensor Riemann-Cristoffel reduzido*, $G_{\mu\nu}$, que resulta do primeiro, $G^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}$, por uma operação que resume a fórmula $G_{\mu\nu} = G^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$.

Êste tensor, $G_{\mu\nu}$, é o único tensor de segunda ordem, dependente dos *gg* e suas derivadas, não tendo derivadas de ordem superior à segunda e linear em relação a estas.

Eis as equações da gravidade na ausência da matéria ou energia.

A presença da matéria ou energia marca-se pela introdução de um tensor energético.

Na equação de Poisson $\Delta\Omega = 4\pi G\varrho$, com potencial Ω newtoniano, G constante de gravitação newtoniano e ϱ densidade, ϱ é o caso particular, caso limite para o repouso e coordenadas galileanas, dum tensor de energia T^{ν}_{μ}.

A lei da conservação exige que a *divergência* [1] dêsse tensor seja nula como idênticamente nula é a *divergência* do tensor

$$G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G,$$

que é o mais simples dos tensores conservativos.

Se, com Eddington, pensamos que um tensor físico é o aspecto da estrutura geométrica do Universo e T^{ν}_{μ} é um tensor conservativo, é natural identificar,

1 Nêste algoritmo a *divergência* é a generalização imediata do cálculo vectorial clássico: a divergência dum quadrivector é um escalar.

com a aproximação duma constante $\varkappa$, os dois tensores e teremos a fórmula:

$$G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -\varkappa T_{\mu}^{\nu}$$

ou

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

que exprime a lei gravífica de Einstein [1].

A nova lei de gravitação, seja antes, a *nova lei* da inércia, ou, melhor ainda, a lei da *nova inércia*, tem sôbre a de Newton a vantagem dum maior rigor, pois, abstraindo de observadores priveligeados, tem toda a generalidade e não envolve o indeterminismo que a variação da massa e da distância introduziam na fórmula newtoniana.

Mas só as confirmações experimentais podiam dar-lhe a verdadeira garantia, pois que o indeterminismo da lei newtoniana podia ser tomado à conta de *insignificante* se em sua primeira forma ela bastasse à explicação de todas as experiências.

Ora, como ela é uma primeira aproximação da fórmula einsteiniana, necessário era ir até conseqüências para lá das primeiras aproximações.

O deslocamento do perihélio de Mercúrio, o pêso da luz e o desvio das riscas do espectro são as tres principais conseqüências chamadas a decidir entre as duas fórmulas.

1 O processo de Einstein consistiu no desenvolvimento de $G_{\mu\nu} = 0$ de acôrdo com as equações clássicas de Lagrange e adição, ao tensor de energia gravífica, do tensoı T_{μ}^{ν}.

O PERIHÉLIO DE MERCÚRIO

No campo de gravitação dum centro material e num Universo euclidiano o *intervalo* elementar seria em coordenadas polares:

$$x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \varphi \text{ e } x_4 = t$$

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sen^2 \vartheta\, d\varphi^2 + dt^2.$$

Tomemos a mesma fórmula para exprimir o *intervalo* elementar no nosso campo de gravitação.

É claro que isso só será possível interpretando depois *convenientemente* as coordenadas [1].

Admitamos que o campo é simétrico em relação ao centro e introduzamos também as simetrias no espaço e no tempo: a fórmula precedente terá apenas três coeficientes desconhecidos e será

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sen^2 \vartheta\, d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2.$$

Comparando com a expressão de ds^2 em função dos potenciais gravíficos, procurem-se para êste caso os valores que tomam os símbolos do Christoffel.

Teremos assim as equações

$$\text{(a)} \quad G_{11} = 0,\ G_{22} = 0,\ G_{33} = 0,\ G_{44} = 0,$$

sendo idènticamente nulos para os referidos valores os outros componentes de $G_{\mu\nu}$ menos G_{12}, que, para o valor particular do determinante g, é também nulo.

Pondo êste valor de g em (a) e combinando estas equações, chegamos a duas equações, que, pela consideração de que o valor ds^2 para uma distância in-

[1] Já aqui fizemos a destrinça do espaço e do tempo e *levamos* um pouco de *newtonianismo* para começar o estudo em primeira aproximação. Newton não se deixa, pois, escorraçar, como veremos melhor adeante.

finita do centro será o mesmo que na ausência de gravitação e pela introdução do factor

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

onde G é a const. newtoniana e m ou M consts. de integração, combinadas, dão

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\varphi^2 + \gamma dt^2.$$

O problema do movimento dum ponto consiste então em achar as equações $G_{\mu\nu} = 0$ e integrar, para *êstes* valores particulares dos símbolos de Cristoffel, as equações diferenciais einsteinianas do movimento que são da forma

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0 \ (\sigma = 1,2,3,4) \ (b)$$

Estas fórmulas [1] permitem, escolhendo um azimute,

1 A fórmula

$$\partial \int \sqrt{\Sigma g_{\mu\nu} d x_\mu dx_\nu} = o \quad (1)$$

contém as equações do movimento.

Pondo

$$L = \sqrt{\Sigma g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dx_\nu}{dt}}$$

e calculando a variação de L, a equação (1) desdobra-se em quatro, que convenientemente tratadas e resolvidas em ordem a $\frac{d^2x}{ds^2}$, etc., dão, pelo uso dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{dg_{\mu\lambda}}{dx_\nu} + \frac{dg_{\nu\lambda}}{dx_\mu} - \frac{dg_{\mu\nu}}{dx_\lambda} \right)$$

e $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} = \sum_\alpha g^{\lambda\alpha} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{bmatrix}$ — as equações (b)

demonstrar que a órbita é plana e, tomando para eixo polar a normal ao plano de órbita, chegar, numa primeira aproximação, à fórmula

$$r = \frac{\frac{C^2}{m}}{1 + e \cos(\varphi - \omega)},$$

onde C é uma const. de integração, m apareceu por comparação duma das operações (a) para os valores particulares do problema com a equação das fôrças vivas, e ω na fórmula dum integral geral.

Esta fórmula concorda com a dinámica newtoriana dum planeta, onde e é a excentricidade e ω o ângulo da posição do perihélio.

Fazendo uma segunda aproximação pela introdução de factores prèviamente desprezados, teremos essa segunda fórmula

$$r = \frac{\frac{C^2}{m}}{1 + e \cos(\varphi - \omega - \partial\omega)},$$

diferindo no deslocamento do perihélio

$$\partial\omega = \frac{12\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)} \varphi,$$

que para Mercúrio dá o valor da observação a menos de 0,"5.

Eis portanto um caso notável de superioridade experimental da nova lei sôbre a de Newton.

O PÊSO DA LUZ — A trajectória da luz, é, como toda a trajectória no Espaço-Tempo einsteiniano, uma geodésica.

Mas, na ausência de campo gravífico e para a luz, temos a equação $ds = 0$, que deve subsistir para o campo gravífico visto ser um invariante.

A geodésica da luz é, pois, uma geodésica de comprimento igual a zero.

E a equação

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sen^2 \vartheta \, d\varphi^2 + \gamma \, dt^2.$$

dá, para o movimento num plano e para a luz $ds = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \gamma.$$

Introduzindo o novo parámetro r_1, dado por $r = r_1 + m$, e desprezando os termos do segundo grau em $\frac{m}{r_1}$ e $\frac{m}{r}$, teremos a nova equação

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + r_1^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2,$$

cujo primeiro membro é, em coordenadas polares, o quadrado da velocidade.

Teremos, pois, $v = 1 - \frac{2m}{r_1}$, e o efeito do campo sôbre a luz é idêntico a um meio de índice de refracção

$$\frac{1}{v}, \text{ ou } 1 + \frac{2m}{r_1}.$$

A trajectória da luz obedecerá ao princípio de Fermat de ser mínimo o integral

$$\int\left(1 + \frac{2m}{r_1}\right) ds.$$

A curva que satisfaz a esta condição é a cónica:

$$r_1 = \frac{\frac{C^2}{2m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{C^2}{4m} \cos \varphi}},$$

com a excentricidade

$$e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{4m^2}} \text{ e } p = \frac{C^2}{2m};$$

logo é uma hipérbole, cujo ângulo de assíntotas é

$$\frac{4m}{R} = \frac{4GM}{c^2 R}.$$

Êste ângulo é pròximamente o desvio dum raio luminoso vindo do infinito e passando para o infinito à distância R do centro gravífico.

Para um raio duma estrêla razando o Sol, deve ser de 1",74; pròximamente o dôbro do ângulo calculável pelas fórmulas newtonianas.

O eclipse de Maio de 1919 veio trazer um famoso triunfo às previsões de Einstein.

A propagação radial, para o centro gravífico, dará uma repulsão — o que é chamado a explicar certos curiosos fenómenos astronómicos.

A ESPECTROSCOPIA. — A fórmula

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sen^2\, \vartheta\, d\varphi^2 + \gamma c^2 dt^2$$ [1],

dá para dois acontecimentos infinitamente vizinhos, no mesmo ponto do campo:

1 É a mesma que temos usado com uma simples mudança na unidade de tempo.

$$d\tau = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma}\, dt,$$

sendo $d\tau$ o intervalo de tempo próprio e dt o intervalo medido por um observador ligado ao centro, mas muito afastado.

Dois relógios idênticos afastados do centro medem o mesmo tempo t. Se aproximamos um à distância r do centro, êle terá

$$\int d\tau < \int dt,$$

marchando mais lentamente e atrazando-se em relação ao outro.

Suponhamos um fenómeno periódico de emissão, independente do campo. Um observador terrestre medirá êsse fenómeno no Sol com

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma}}$$

e se o fenómeno é terrestre medirá $d\tau < dt$. As riscas do espectro solar devem, pois, aparecer-lhe desviadas para o vermelho — o que se verificou para o cianogénio, magnésio e ferro.

São estas as principais ordens de considerações experimentais que deram vantagem à nova teoria da relatividade generalizada, que aliás é possível ainda completar por novas determidações a introduzir no *Espaço-Tempo* e que devem ser as dos fenómenos electro-magnéticos, a partir dos quais de resto começara a teoria restrita. É fechar o ciclo da grande síntese relativista.

As equações de Maxwell têem já a forma tensorial e fácil é mostrar que se podem escrever com a forma:

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu};\ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=J^\mu\ ; \qquad (c)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico esquerdo formado dum quadrivector potencial φ_{μ}, cujos componentes do espaço são, àparte o sinal, os componentes de potencial véctor (electro-magnético) e cujo componente do tempo é o potencial escalar (electro-estático) e onde J^μ é um quadrivector contravariante, cujos componentes de espaço dão a corrente de convecção e a do tempo é a densidade da carga, e deduzido, como se vê, do tensor contravariante $F^{\mu\nu}$ associado de $F_{\mu\nu}$.

Num sistema em que existam cargas e correntes eléctricas deve existir um tensor de energia que compense o tensor material T_μ^ν.

Êsse tensor deduzido a partir de (*b*) e dos potenciais gravíficos é da forma:

$$E_\mu^\nu=\frac{1}{c^2}\left(-F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}g_\mu^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

Assim a condição que nos diz tratar-se dum sistema conservativo será pela introdução das divergências dos tensores:

$$E_{\mu\nu}^\nu+T_{\mu\nu}^\nu=0.$$

Num campo de energia devido apenas aos electrónios a equação fundamental será

$$(d) \qquad G_\mu^\nu-\frac{1}{2}g_\mu^\nu G=-\varkappa E_\mu^\nu,$$

onde E_{μ}^{ν} é o tensor de energia do campo dos electrónios. Mas sendo, como é, nulo o invariante E_{μ}^{μ}, devia também ser nulo o primeiro membro $G_{\mu}^{\mu}-\frac{1}{2}g_{\mu}^{\mu}G$: o que correspondia ao absurdo da não existência de matéria.

Êste absurdo evita-se substituindo (*d*) por

$$G_{\mu}^{\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu}^{\nu}G=-\varkappa E_{\mu}^{\nu}.$$

De acôrdo com esta equação a fórmula de Einstein para o vazio será:

$$G_{\nu}^{\mu}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}G=0.$$

E a lei da gravitação na matéria será, com $\lambda=\frac{G_0}{4}$, sendo G_0 a curvatura no vazio.

$$G'_{\mu\nu}=G_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}=-\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \qquad (e)$$

Tomando como unidade de volume um espaço suficientemente largo e uma densidade média ϱ para a matéria e atendendo a que as velocidades astrais são muito pequenas em relação à da luz, poderemos supor um sistema de referência para o qual a matéria seja *em média* em repouso e (*e*) dará, porque $T_{\mu\nu}$ quási se reduz a $T_{44}=G_{44}\varrho$:

$$G_{\mu\nu}-\left(\lambda+\frac{1}{2}\varkappa\varrho\right)g_{\mu\nu}=0.$$

Por considerações análogas às que fizemos no estudo do campo gravífico dum centro material pode achar-se a solução que para êste caso dará o valor do intervalo ds^2.

São duas as solucões para um corte do Espaço-Tempo a tempo constante, a de Einstein e a de Sitter, dando ambas um espaço de curvatura positiva constante: como o espaço riemaniano.

Para Einstein, o Universo é um cilindro a quatro dimensões com o espaço e o tempo separados; reaparecendo, pois, o absoluto das noções primitivas de espaço e tempo: Universo fechado no espaço, indefinidamente aberto no tempo. Indefinida e não infinitamente, porque ainda a entropia é, com o relativismo das temperaturas, um invariante.

Essa entropia encerrará o Universo não se sabe quando, mas precisamente quando a dispersão da matéria ou energia reduzir o espaço ao vazio, onde por ventura circulem em luz fria os fantasmas dos mundos desaparecidos.

O raio do Universo de Einstein é função da matéria e levará, ao reencontro no mesmo ponto um bilião de anos depois, os raios luminosos partidos dum astro.

O raio do Universo sendo da ordem de 10^{20} cms. carecia na hipótese de Einstein de muito mais matéria do que a conhecida — o que pode dar uma previsão de novas massas siderais ou dar superioridade à interpretação de Sitter. Verêmos como a geometria super-riemaniana de Weyl nos aproxima das conclusões einsteinianas.

O Universo de Sitter é esférico no espaço e também aberto mas curvo no tempo, sem possibilidade de retôrno, pois é como um hiperboloide.

Há zonas de tempo retardado, onde, em relação ao observador afastado, os fenómenos se atrasam até ao limite do estacionamento.

A espectroscopia das nebulosas espirais mostra um retardamento das vibrações atómicas ¿será um fenómeno da evolução dos mundos? ¿será o efeito Sitter do retardamento do tempo?

A solução Einstein parece receber um apoio interessante da nova geometria cósmica a que chega Weyl pela consideração do campo electro-magnético e da *relatividade dos estalões* que êle implica.

Na teoria de Einstein a electricidade não contribui para a definição da geometria do Universo, ou apenas o fazia indirectamente pelas correcções introduzidas na primitiva fórmula; o seu espaço-tempo era dado pelos valores dos potenciais *gg*.

Mas essas considerações diziam até que o *invariante*, E^{μ}_{μ}, que é a contracção do novo tensor E^{ν}_{μ}, é nulo — o que não modifica a curvatura total G.

É certo, porém, que por essas mesmas considerações o G, que no vazio, G_0, era nulo, é agora constante e igual a 4λ; e, sendo primeiro na matéria $\varkappa\varrho_0$, é agora $4\lambda + \varkappa\varrho_0$.

Mas Weyl vai estudar directamente o campo electro-magnético e mostrar a sua geometria de modo que a condição dos estalões idênticos nos diferentes pontos desapareça, substituída pelos novos parâmetros diferentes dos *gg*, que *completem* a estrutura geométrica do Universo.

O espaço euclidiano é evidentemente um abstracto do *espaço gravífico* e aqui se pode ver e històricamente relembrar a repugnância na compreensão dos antípodas. O espaço euclidiano foi o indeterminado, o indefinido (o infinito em linguagem vulgar e incorrecta) oferecido à *inserção* dum *outro* espaço gravífico onde pudessem entrar os antípodas.

Um homem que dê volta à terra muda permanentemente de direcção em relação a um sistema de eixos apontado às estrêlas. Para um desvio angular de 180°, uma criança dirá que ficou de cabeça para *baixo*, porque supõe a direcção *integrável*, nós diremos que permaneceu sempre para *cima*, porque as direcções não são *integráveis*, isto é, o para *baixo* e o para *cima* são variáveis.

A não *integrabilidade* da direcção exprime um campo de gravidade. Ora em toda a teoria de Einstein é suposta a *integrabilidade* do comprimento, isto é, supõe-se que aos estalões de medida transportados de A para B é indiferente o caminho seguido.

¿Esta hipótese não corresponderá à anulação dum *outro* campo?

Campo de gravidade e campo electromagnético, eis todo o Espaço-Tempo da física: ¿não será, pois, o campo electromagnético aquele que foi arbitràriamente suprimido com a hipótese da *integrabilidade* do comprimento?

Suponhamos em cada ponto um estalão [1] e seja l no ponto P.

Desloquemos o estalão que supomos aumentado em relação aos estalões locais de λl.

Será [2]

$$\lambda = k_1\, dx_1 + k_2\, dx_2 + k_3\, dx_3 + k_4\, dx_4 \qquad (f).$$

Tomemos as coordenadas próprias e os símbolos, $F, G, H, -\Phi$; esta fórmula dará

$$\frac{dl}{l} = \lambda = F\,dx + G\,dy + H\,dz - \Phi\,dt \quad \text{ou}$$

$$\log l + \text{Const.} = \int (F\,dx + G\,dy + H\,dz - \Phi\,dt)$$

1 Obedecendo à condição única de serem tão pròximamente idênticos quanto possível.

2 É claro que isto envolve ainda algumas restrições que Weyl adopta, e Eddington procurará levantar tanto quanto possível.

e a condição da independência de l em relação ao caminho seguido será que

$$F\,dx + G\,dy\; H\,d + z - \Phi\,dt$$

seja um diferencial exacto ou

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

que são, como se sabe, as expressões das seis componentes das fôrças eléctricas e magnéticas, sendo F, G, H, Φ, os potenciais da teoria electro-magnética. Assim, paralelamente ao que acontecia com os *gg* para o campo gravífico de cuja anulação dependia a integrabilidade das direcções, a integrabilidade dos comprimentos depende da anulação do campo electro-magnético.

A geometria do Espaço-Tempo depende, pois, não só dos *gg* como dos *kk* da fórmula (*f*).

Esta nova geometria do Universo é a geometria de Weyl.

Como a indeterminação das coordenadas deu, na geometria física de Einstein, as quatro expressões da conservação da impulsão-energia, a indeterminação do sistema de estalões dará aqui uma nova lei de conservação, que será a da electricidade.

Eddington suprimindo ainda as restrições de Weyl e supondo apenas a cada ponto um *Universo euclidiano tangente* introduz novos tensores absolutos, isto é, independentes do sistema de estalões, chegando às mesmas fórmulas de Weyl, mas onde o comprimento l é apenas uma convenção geométrica.

Para depois lhe dar um significado físico procura o único invariante absoluto ligado ao deslocamento $A\mu$ e que tenha a forma quadrática e põe

$$l^2 = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = \frac{1}{\lambda} {}^{*}G_{\mu\nu}\,[1]\, A^{\mu} A^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} B_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} \text{ ou } B_{\mu\nu} \pm \lambda g_{\mu\nu} \quad (g)$$

sendo λ uma constante universal.

A diferença entre êste tensor $B^{\mu\nu}$ e o tensor $G^{\mu\nu}$ de Einstein está nos termos dum outro tensor dos fenómenos electromagnéticos.

Tomando os escalares de (g) teremos $B = {}^{*}G = 4\lambda$ para todos os pontos.

Ora, como λ não pode ser nulo, teremos um Universo de curvatura constante e espaço fechado, onde qualquer objecto é uma parte do raio de curvatura do Universo.

O electrónio será uma deformação local, na teoria de Einstein, e como num sistema natural de estalões ${}^{*}G$ tem nele o mesmo valor, claro é que o tensor electro-magnético, que marca a diferença de ${}^{*}G$ de Eddington e do G de Einstein, será nêle muito grande.

Daqui sai uma indicação curiosa sôbre a ordem de grandeza do raio do Universo.

A massa gravífica ou raio dum electrónio é da ordem 7×10^{-56} cms. o seu raio eléctrico é da ordem 2.10^{-13} cms.

Ora a relação dos dois raios será, pelas considerações anteriores, da mesma ordem de grandeza que

1 Tensor absoluto. Êstes tensores podem decompôr-se em dois: correspondentes aos fenómenos de gravidade e ao electromagnetismo.

a relação do raio eléctrico do electrónio para o raio de curvatura do Universo.

O raio do Universo será, então, da ordem de grandeza de 6.10^{29} cms.; superior aos cálculos de Sitter.

E eis-nos de novo em frente de conclusões próximas das anteriores conclusões de Einstein sôbre o Universo.

Assim vimos como se complica e organiza a noção de Espaço desde a métrica euclidiana até à noção superior do Espaço-Tempo da física moderna, sempre de acôrdo com o nosso critério da *máxima racionalização* do diverso experimental.

A CERTEZA E A VERDADE

A CERTEZA E A VERDADE — O PROGRESSO SCIENTÍFICO: A REVISÃO DAS BASES SCIENTÍFICAS :

Acabamos de ver a actividade scientífica em acção e, com ela, o aparecimento de especiais conceitos de *certeza* e de *verdade*.

O sábio em critério estritamente scientífico dirá que as suas construções a partir dos princípios fundamentais são *certas* e, por isso mesmo, verdadeiras.

Não precisa mesmo de procurar outra significação à palavra verdade, àlém da certeza do sistema construído a partir dos princípios fundamentais.

A escolha dêstes é que é feita por uma qualidade irredutível e que constitui o valor singular de cada sábio no progresso de cada sciência, o valor colectivo das preferências de todos aqueles que para a sciência contribuiram, quando esta, por seu largo desenvolvimento, já se presta a uma sistemática exposição hipotético-construtiva.

É a essa escolha que se pode aplicar melhor o critério das convenções cómodas de Poincaré, onde a palavra *convenção* marca o *indeterminismo* da escolha e a palavra *comodidade* marca a maior *fecundidade* scientífica duma dada escolha particular.

No limite parece pudermos dizer que, em efeito, os métodos scientíficos acharam o acôrdo tácito dos sábios na divisão do campo da sua actividade em duas zonas: uma de perfeita certeza e outra de dúvida.

Para um perfeito entendimento na dúvida encontraram o critério do *contracto* ou *convenção:* «Convencionemos que partimos dos sêres $a, b, c\ldots$ definidos pelos princípios $\alpha, \beta, \gamma\ldots$» ou «Sejam os sêres $a, b, c\ldots$ obedecendo às selecções $\alpha, \beta, \gamma\ldots$».

Destas convenções iniciais vai sair toda a sciência que, *dentro do condicionalismo original*, será de perfeita e indiscutível certeza.

É assim claramente para a exposição duma sciência evoluída; é assim também para cada estádio evolutivo da sciência.

Cada sciência progride, com efeito, pela fecundidade da hipótese indagadora, como, para a própria biologia, muito bem viu Claude Bernard.

É assim que Galileu formula a lei da queda dos graves com a hipótese da fôrça constante ou do movimento uniformemente acelerado: seja *0* a velocidade inicial e v a velocidade final, *se a velocidade cresce proporcionalmente ao tempo* poderia substituir o movimento dado por um movimento uniforme de velocidade $\frac{v}{2}$ (média das velocidades finais) e então:

$$v = kt, \quad e = \frac{v}{2}t = \frac{k}{2}t^2.$$

Hoje poderíamos duma maneira muito mais geral dizer que o movimento dum grave se fará segundo a *sua geodésica* e que esta, sendo uma parábola, será para dadas condições, da forma $e = \frac{k}{2}t^2$; como diríamos que a trajectória dum corpo sob a única acção duma fôrça instantânea seria a *sua geodésica*, recta do espaço euclidiano, da forma $e = kt$; como num campo electrostático um grave dêsse campo (partícula sujeita só à acção do campo) seguiria a *sua geodésica* $e = k't^2$, etc., etc.

Mas esta convenção não é inteiramente arbitrária; é, na frase de Poincaré, a *convenção cómoda.*

A convenção cómoda é aquela que, sem ser imposta pela experiência, é por esta sugerida.

E assim é que Poincaré tenta em vários trabalhos mostrar a influência da experiência comum na escolha dos princípios e elementos da Geometria euclidiana.

É claro que tratando-se da *experiência comum* os princípios e elementos a pôr na base da geometria têem uma clareza, uma evidência e uma aceitação, que não poderão ter os princípios e elementos duma sciência, extraídos duma experiência, que, longe de ser comum, resulta duma selecção percepcional já muito aturada, como, por exemplo, a física ou a própria mecânica.

Mas nêste, como na geometria, é possível a exposição hipotético-construtiva, e até alguns filósofos a classificaram como sciência racional, ao mesmo tempo que outros, como Comte, classificavam a geometria como uma sciência de observação.

Alguns comentadores de Poincaré, como L. Rougier por exemplo, reduzem a teoria das convenções cómodas à parte geométrica, como se Poincaré tivesse feito dela uma simples gnoseologia geométrica.

Ora é certo que Poincaré não limitou tal teoria à parte geométrica e tanto assim que teve de limitar em publicações sucessivas o largo indeterminismo deixado às teorizações, pois que apressados comentadores concluiram um excessivo e por vezes interessadamente destruïdor *nominalismo.*

L. Rougier em frente do indeterminismo geométrico fala das experiências cruciais em física, como a célebre experiência de Foucault decidindo entre Newton e Fresnel.

Poincaré e Duhem tinham mostrado claramente que tal experiência não impõe a necessidade lógica de opção, mas a sugere como a mais elegante e cómoda solução dum problema, que, aliás, tinha outras.

Não há, pois, em nenhuma sciência o unitarismo lógico, a *necessidade* duma *só* solução; como não há em geometria o absoluto indeterminismo ou radical pluralismo lógico de indefinidas soluções.

Há uma experiência em geometria tão crucial como a de Foucault para a óptica: é a de medida.

¿ Quereis medir as linhas e os ângulos do espaço, determinar as figuras e as suas relações?

Tereis de sujeitar a escolha inicial ao condicionalismo da possibilidade métrica, seja das figuras iguais (congruentes), seja dos deslocamentos sem deformação.

E essas condições limitam (àparte os casos de isomorfismo) os grupos métricos a três grupos: euclidiano, hiperbólico e elítico.

Dentro dêstes três grupos ¿não há experiências cruciais que marquem o determinismo da selecção?

Não há uma singular experiência que o faça, mas existem as considerações de harmonia e elegância (o máximo de ordem lógica no máximo de riqueza experimental) que fizeram, como já vimos, a opção do grupo euclidiano.

As experiências cruciais em geometria fizeram-se em dois tempos: a possibilidade de medir dando o *género* espaço métrico, a escolha da *espécie* preferível.

As experiências cruciais em física não levam êstes dois tempos, porque o primeiro tempo foi *recebido* da geometria.

Se assim não fôsse, se o físico vem a discutir o espaço geométrico, ela fará, como veremos, a opção duma espécie que pode muito bem ser diferente da euclidiana e será feita num *só tempo* pela construção do seu grupo e invariantes dêsse grupo sem querer saber dos outros grupos possíveis, aparecendo sòmente o euclidiano como *limite* de qualquer dos outros.

Uma experiência de física envolve sempre uma experiência geométrica e desde então são lògicamente possíveis duas atitudes: supor o espaço geométrico escolhido e as leis físicas têem de se exprimir nêle ou supô-lo indeterminado e escolher *aquele* que mais directamente é dado pelas leis físicas dos fenómenos.

É assim que a experiência de Michelson se exprime imediatamente no primeiro caso pelo *fenómeno físico* da contracção Lorentz; e a mesma experiência se traduz no segundo caso pelo *grupo geométrico* de Lorentz, onde o *invariante* é muito simplesmente outro, isto é, o grupo dos deslocamentos dos sólidos hiperbólicos numa multiplicidade (espaço-tempo) a quatro dimensões de curvatura negativa e de constante espacial 3.10^{10} cm.

Desligar a física da geometria, de molde a dar à segunda caracteres scientíficos específicos, é, sempre e ainda, obra duma convenção cómoda, na linguagem de Poincaré.

Os mesmos grupos de Sophus Lie demonstram directamente na mecânica a possibilidade de encontrar indefinidas [1] explicações mecânicas a partir duma dada explicação: a escolha dum mecanicismo do Universo físico é ainda e sempre fora do absoluto necessitarismo lógico.

O real mecanismo do Universo será fìsicamente (entropia) aquele para o qual se der a mínima probabilidade de possível reversibilidade.

1 Veja-se a superficialidade dos deterministas de ligações totais, como Dantec, feitos das generalizações do mecanicismo scientífico.

Às certezas absolutas e fixas da velha Razão tiránica sempre substituída a graça da harmonia, a opção e elegância ou beleza, o livre e tolerante acôrdo da maior ou menor probabilidade.

Nenhuma necessidade pesa sôbre a certeza scientífica, mais que aquela aí posta pela liberdade do espírito scientífico.

E para a verdade seria o mesmo que para a certeza se não fôsse o limite do campo scientífico pela experiência percepcional.

Uma sciência cuja certeza coïncidisse com a verdade, seria uma sciência em que os sábios se tivessem desinteressado das suas condições basilares: seria, pois, uma escolástica.

O condicionalismo dos seus princípios e elementos é que sujeita a sciência à penetração da realidade percepcional e é, por isso, que uma revisão dos princípios é o grito que aparece nos arraiais scientíficos sempre que a experiência veio pôr problemas alarmantes.

De modo que a certeza e a verdade coïncidirão tanto mais quanto numa dada sciência seja possível limitar o campo das experiências, e, sendo possível isolar inteiramente um conjunto experimental, então a verdade e a certeza da sciência correspondente tenderiam para a identificação pois que seria possível uma escolha duradoura e completa de princípios e elementos originários.

É o que mais ou menos acontece com as sciências matemáticas, onde a experiência se limitou ao que há de comum e essencial no mundo das percepções, e que levou a dar a essas sciências o nome de formais, como consistindo no estudo das formas dos fenómenos, independentemente da essência dêsses fenómenos.

Ora sob êste ponto de vista todas as sciências são formais, porque as últimas entidades do real serão sempre, e apenas, conhecidas scientìficamente pelas relações que as leis scientíficas determinam.

Mas o formalismo das sciências matemáticas consiste em que estas se referem às relações mais gerais de ordem e quantidade: o âmbito da sua acção é limitado, vivem num sistema fàcilmente isolado, porque abrangendo todo o real, dêle só curam das relações gerais de quantidade e forma.

De modo que, muito cêdo de posse dum sistêma de relações funcionais, passeiam pelo real as suas relações, e, sempre que elas não bastem e êste *imponha* novas funções, estas serão constituídas a partir das funções já existentes, como se o sistema matemático a si mesmo se bastasse e pudesse dispensar os ensinamentos da experiência.

O físico não pode isolar os seus sistemas com a mesma facilidade, porque não tratando apenas das relações gerais de forma e quantidade, mas também de qualidade, esta é função de tantas variáveis que o perfeito isolamento é impossível: os seus sistemas deixam sempre fios de ligação para o exterior que os modificam, e, no interior, impossível lhe é também isolar as qualidades e estudar.

É assim que o físico, por a sua independência do químico, decretou não chegar à estrutura atómica da matéria, e os fenómenos da electrólise, da ràdioactividade, etc., vieram-no pôr em contacto com a química numa maior profundidade que o próprio químico, isto é, na arquitectónica interior do átomo.

Chamemos *espírito* à *actividade funcional do conhecimento*, chamemos *matéria* a todo o *conhecido* considerado independentemente da actividade que conhece, chamemos *experiência* à *interacção* do *espírito e da matéria* no acto de *conhecer*.

O especial formalismo que vimos nas matemáticas resulta, com efeito, da relação *úni-múltipla* e *múlti-una* do espírito e da matéria: porque o espírito pode construir uma forma valendo para várias matérias e muitas formas para um resíduo esquemático de matéria é que é sempre possível construir, *em excesso*, funções aplicáveis à experiência e refazer a partir da actividade construtora aquelas funções que a experiência precise ou sugira.

E esta capacidade de criar funções em face da experiência entra pelo domínio de todas as sciências, de modo que a matemática vai-se enriquecendo de toda a experiência scientífica como e correspondentemente tem de ante-mão funções e formas para experiências as mais diversas: secções cónicas e Képler, o cálculo dos tensores e Einstein, etc.

Mas com isto a matemática goza do singular privilégio de dar e receber formas já construídas, independentemente da *experiência em que se construiram*: a matemática tomando-as é como uma nova reflexão, reconstruindo-as a partir dos princípios e elementos.

Isto explica o singular papel da matemática, como sendo intrìnsecamente a mais simples de todas as sciências, pois todas a levam em seu seio, e não sendo de modo algum a de mais fácil apreensão.

Dizei aos vossos alunos de matemática que esta é a sciência mais simples e vereis nêles a mais sincera admiração.

É que, sendo efectivamente a mais simples, as operações experimentais, em que o Espírito actuando sôbre a matéria gerou as percepções [1] scientíficas,

[1] Chamo percepções scientíficas, as percepções selecionadas, que se vão substituindo às percepções comuns: é mais ou menos o que em nós existe de parecido com a intuição de Kant para o espaço, como já vimos. Percepção que, por exemplo para a recta, deixa indeterminado um mínimo ou um zero de curvatura.

foram feitas longe do actual esfôrço consciente do Espírito: por isso os vários pensadores não encontrando a actividade do juízo e antes a sua fria cristalização em fórmulas, falam de apriorismos formais, etc., etc..

As experiências duma sciência menos evoluída, isto é, em que as percepções scientíficas mais se aproximem das percepções comuns, parecem por isso mesmo mais fáceis: uma experiência de física é inteiramente incompreensível a um não-iniciado, uma experiência de fisiologia simples é quási acessível (mesmo acessível com uma iniciação de momento) a qualquer espírito atento.

As percepções do físico estão muito longe das percepções comuns: os deslocamentos angulares podem ser tempos, intensidades, fôrças electromotrizes, etc., etc.; as percepções do biologista, em simples experiências que não envolvam já um alto simbolismo da física ou da química, a circulação do sangue, por exemplo, são mais directamente acessíveis.

E àlém disso as experiências especìficamente [1] do físico, ou do biólogo, ou do químico, etc., passam-se agora à luz do esfôrço consciente e as experiências da matemática são fora do campo da consciência ou na penumbra das margens.

A experiência da troca, que gerou a correspondência, base da matemática, é um simples sinal cenestésico de adaptação, muitas vezes um simples sinal do sentido das atitudes segmentares.

Tudo isto explica a singularidade da comum dificuldade para as matemáticas de par com a sua intrínseca simplicidade.

Como porventura explica o parentesco espiritual

1 Especìficamente, porque uma grande parte é experiência matemática.

do matemático e do poeta, naquele pelo seu papel de reflexão do pensamento sôbre as suas obras, nêste pelo sentido de harmonia, que é uma forma específica da cenestesia dos poetas.

E porventura ainda o interessantíssimo caso das precocidades matemáticas e músicas como formas específicas (mais conscenciadas) da cenestesia.

Por outro lado a ligação não *biünívoca* do espírito e da matéria, na base da matemática, mostrando directamente aquele a criar funções que esta recebe e aceita (as previsões célebres), revela uma tal superioridade do Espírito que faz compreender a geral sedução dos matemáticos para uma concepção idealista do Universo.

E, com efeito, há uma grande prova matemática da existência de Deus: é a superioridade do Espírito sôbre a matéria, a sua libertação da correpondência biünívoca com esta, deixando pairar sôbre as desordens percepcionais as grandes harmonias do número e figurar a branca túnica de Pitágoras flutuando, iluminada, sôbre as trevas da matéria.

Mas, quer a geometria, quer a aritmética, não podem ser, nem são simples concepções do espírito solitário.

Toda a vida do espírito é experimental, quere dizer é relação social, *convivência*.

Vimos as geometrias aparecerem pela teoria dos grupos de Sophus Lie, lògicamente hierarquizados.

Se formos à mais simples, isto é, à mais geral e extensa, à *Analysis Situs*, encontraremos nela a noção de ordem, base da numeração ordinal, que é evidentemente de natureza experimental.

Experiências de movimentos para a sucção, deglutição, etc., na criança, movimentos para a apreensão e escolha de alimentos são pelo menos as experiências que, inscritas em sensações musculares, tácteis, gostativas, cenestésicas ou viscerais, etc., marcam as linhas de estrutura do espaço-ordem.

Quere dizer que o espírito solitário não tiraria de si inteiramente esta geometria, como de si não poderia tirar a aritmética.

A ideia de número aparece-nos, lógica e psicològicamente, precedida da ideia de ordem, como, com efeito, nos aparece, pelos estudos etnográficos nos primitivos, no *acto* de troca ou *correspondência*, ligada à geometria ordinal das diferentes partes do corpo.

Se epistemològicamente quisermos construir o número independentemente do espaço, teremos de ir buscar a *ordem* (absolutamente indispensável à ideia de número) a outra qualquer seriação, como, por exemplo, ao tempo.

Mas nada adeantamos, porque o tempo irreversível implica a ideia de espaço, pois, sem ela, encontraríamos apenas a direcção temporal do ritmo da nossa consciência, a cada passo aliás desmentido pelas formas de transitoriedade da matéria.

E longe de ser um espaço absolutamente homogéneo, como quere Bergson, será um espaço ordenado, já com certa organização, que precisamos para dar vida à deposição ordinal dos números.

Dois sêres superficiais que se deslocassem em dois planos perpendiculares poderiam encontrar os três sinais comuns aos dois planos, $+ 0 -$, um num sentido, outro em sentido oposto, a partir do zero, e não poderiam concordar no *antes* e no *depois*, se não tivessem já determinado a intersecção dos planos por uma linha onde o alinhamento dos sinais marcasse o *mesmo* sentido para a determinação da ordem temporal das sensações.

O mesmo poderia acontecer para os sêres das três dimensões num espaço a quatro dimensões, não calculando convenientemente as suas intersecções; teriam fatalmente incompreensíveis desacordos nas seriações do tempo: é o caso do nosso viajante de Langevin e do observador do sistema-fixo, desacordos que o estudo conveniente das intersecções, por Einstein, explica e ordena.

A pressão da experiência, convívio experimental, é portanto insofismável em toda a forma da actividade scientífica.

Revela-se na ordem para a aritmética e para a geometria, *Analysis Situs*, e aumenta (sem nunca o levar ao estrangulamento do absoluto necessitarismo) o abraço de sua pressão até que nas geometrias métricas, com a liberdade de três espécies e sem isomorfismo, marca êsse mesmo limite de três, como marca igualmente o número de dimensões.

Marca êste número sem necessidade, mas (para um corte instantâneo [1] no espaço-tempo) sugere o número de três dimensões como necessário e suficiente.

É claro que abstraímos das considerações que, pelo princípio de Plucker, nos permite partir, por exemplo, da recta em vez do ponto como elemento e tratar portanto o espaço como uma variedade a quatro dimensões.

São transformações matemáticas muito interessantes, para a demonstração do não-necessitarismo scientífico, mas não cabem agora na questão.

Procuramos agora evidentemente o mínimo de dimensões do espaço e teremos portanto de escolher os elementos e princípios que organizem a geometria com o mínimo de dimensões.

Assim são três as dimensões do Espaço, sem que haja necessidade alguma nêsse número.

1 Veremos, com mais detalhe, que não há espaço sem referência a tempo e vice-versa.

Se uma quarta dimensão existisse (quinta no Espaço-Tempo) em contacto pontual com o nosso Espaço e as manifestações vindas da quinta dimensão fôssem tão pouco evidentes que pudessem passar na zona da ignorância ou aproximação das nossas leis scientíficas tudo se passaria como se tal dimensão não existisse.

Se em todo o caso, certos fenómenos físicos, químicos ou geométricos recebessem uma explicação melhor dentro da nova dimensão, ela seria admitida. É um assunto a que teremos de voltar.

Por agora teremos ainda de analisar em relação à aritmética, que quisemos deixar na mesma situação gnoseológica que a geometria e as outras sciências (àparte as diferenciações expostas), a doutrina de Poincaré, que, para êle, ressuscitou os juízos sintéticos *a priori* de Kant.

Poincaré olha a situação do problema em face da alternativa Leibnitz-Kant, seja, dos juízos analíticos ou dos juízos sintéticos *a priori* e parece guardar para a aritmética o necessitarismo que, de acôrdo com Boutroux, seu amigo e parente, e como em seu auxílio vindo dos melhores campos scientíficos, das outras sciências genialmente expulsara.

Compreendendo o poder construtor, sintético, dos métodos geométricos pela riqueza experimental que as convenções basilares recebem, não encontrando convenções da mesma natureza na aritmètologia, Poincaré, para salvar esta de ser apenas um modo subtil de repetir indefinidamente a mesma identidade, resolve que a sua fecundidade vem dos seus juízos, que são juízos sintéticos *a priori*.

Para Kant, como para Platão, tais juízos seriam possíveis, ou, pelo menos, os seus conceitos derivados.

Platão admitia, com efeito, como única hipótese explicativa da existência de conceitos limites, ou ideias puras, que a percepção experimental não possui, a hipótese duma intuïção numérica (cuja evocação adaptativa fingia o esfôrço do juízo), que era a visão reflexa no espelho da memória das formas puras que na vida espiritual foram vistas.

Kant substituiu a estas formas as categorias do entendimento aplicando-se, através dum *esquematismo*, às realidades do mundo sensível.

A imaginação dos esquemas e as intuïções estéticas são as actividades de construção segundo apriorísticas fórmulas.

¿O que justifica o apriórico sintetismo dos juízos aritméticos para Poincaré?

Êle o não disse mais que em algumas expressões, ao arrepio do seu pensamento crítico mais comum.

Poincaré pretende encontrar um processo específico da aritmética e vai analisar êsse processo, pensando ter encontrado nele o segrêdo originário dos juízos sintéticos *a priori*.

O processo de raciocínio específico das construções aritméticas é o que chamará a indução matemática, *indução completa*, ou princípio de recorrência. Parece que Poincaré deixa, por momentos, o conceito de metodologia scientífica que resulta de toda a sua Crítica, esquece os seus próprios trabalhos e aceita a concepção vulgar de sciências indutivas e sciências dedutivas.

Com o critério empírico de indução (à Stuart Mill) esta seria a apreensão duma lei geral na análise dum caso particular.

A conclusão seria provável, daquele grau de probabilidade que depende em geral do princípio (somatário de probabilidades singulares) da causalidade universal, e, em particular, da obediência aos cânones de indução e das analogias, do ar de família, do fenómeno com outros já paralelamente ligados.

A esta probabilidade maior ou menor vê Poincaré opor-se a certeza [1] aritmética, e, como o princípio de recorrência tem o aspecto formal da indução, bastaria dar a esta o poder duma enumeração completa (à Bacon) para resolver o problema da certeza.

Daí o nome de *indução completa* dado ao princípio da recorrência.

Mas ficava ainda sem solução o problema da riqueza e crescimento do saber aritmético.

Êle seria, com efeito, apriorístico e certo; mas ¿em que aumentaria êle os dados da análise donde saiu?

Ou a aritmética era a própria construção da classe A dos casos a, a_1, a_2..., onde por enumeração completa se encontrou a identidade que permite colocá-los dentro da classe A, e a aritmética seria, como as supostas sciências indutivás puras, uma simples espécie destas, tendo chegado ao fim das suas análises por uma completa enumeração dos casos—ou a aritmética seria a definição da classe A e desenvolvimento dessa classe nos termos a_1 a_2 a_3... que a constituem.

No primeiro caso teríamos juízos sintéticos, mas empíricos; no segundo juízos apriorísticos, mas analíticos.

Em ambos os casos seria, porém, uma sciência pouco menos que tautológica: em vez de $A=A$, $A=a_1+a_2+\ldots+\alpha_n$ seria o seu conteúdo.

A saída está em que a *enumeração* indutiva é na aritmética infinita e portanto em vez de se resumir num silogismo contém uma cascata de silogismos sem fim.

Há aqui, interferindo, um problema sério e que vem a ser o do infinito actual.

1 Onde nenhuma dúvida histórica introduzia, como em geometria, a ideia do acôrdo de convenção.

Ou, com efeito, a enumeração é infinita [1] ou é simplesmente indefinida.

Se fôsse infinita, ela corresponderia ao que para Leibnitz eram as verdades de razão suficiente para nós e analíticas para Deus e nós teríamos em relação à aritmética a própria visão em Deus — o conhecimento sob *espécie eterna* de Espinosa.

Se é indefinida, teremos apenas uma lei de formação, como a lei de formação da série natural dos números, que é o próprio facto da nossa relativa independência da matéria.

Ora Poincaré afirma que a virtude do princípio de recorrência está na certeza de que podemos repetir indefinidamente a mesma operação mental.

Essa certeza é, porém, condicional.

Quando chego ao número n partindo de 1 por sucessivas adições de 1, posso passar para $n+1$ se tudo permanecer na mesma; resolver o contrário seria de ânimo leve e sem mais discussão resolver o pluralismo radical e absoluto, a impossibilidade de possíveis estados de êxtase, de unidade, da absorpção gloriosa dos eleitos no resplendor da beleza divina, etc., etc..

Condição que aliás é a própria condição de toda a sciência — a identidade das operações mentais em todo o campo da sua acção.

A possibilidade indefinida das mesmas operações mentais longe de ser o princípio específico da aritmética é o *primeiro* postulado de todo o pensamento.

Não é, pois, essa possibilidade que dá valor e específico significado ao processo construtivo da aritmética.

1 As inequívocas demonstrações de Poincaré contra o infinito actual em pontos mais claros de polémicas filosóficas ainda tornam mais precária a sua situação no caso.

De resto o princípio da recorrência aplica-se sempre que tenhamos bem definida uma lei de formação de quaisquer quantidades, como por exemplo vectores resultantes, que possuam uma propridade *transitiva*, e para essa propriedade.

É um princípio de verificação mais que um princípio construtor.

Todos os estudantes de matemática têem passado, na resolução de certos problemas, pelo estado de espírito a cuja *desproblematização* [1] corresponde perfeitamente êsse princípio.

É o caso de nos encontrarmos de frente com uma formula verdadeira para certos números e cuja verdade geral queremos demonstrar.

À medida que se repetem as experiências aritméticas a que ela vai satisfazendo, vai em nós crescendo a esperança da sua verdade; mas não alcançaríamos nunca a certeza, porque há números de várias famílias, primos, pares, etc. e nunca esgotaríamos as provas.

A *certeza* aparece precisamente quando demonstrarmos que a fórmula apenas envolve a qualidade *genérica* do número definido pela sua lei de formação: cada número é $n+1$.

A verificação então é completa, a partir de qualquer caso, pois que *todos* os números são iguais perante a fórmula.

¿E como sabemos que a *fórmula* está nesses casos?

Demonstrando que se ela é verdadeira para o número n o será par $n+1$: isto é que se tratava de uma propriedade *transitiva*.

Não há nenhuma operação infinita, nem indefinida.

A operação mental foi muito simplesmente a classificação duma propriedade como transitiva.

1 Em linguagem de «Avenarius».

Isto exige, é claro, que se conheça a lei de formação da série para a qual se pretende demonstrar uma propriedade *transitiva*, sôbre a qual, diremos, se deseja passeiar, a vêr se ajusta, um certo sinal.

Ora como é possível construir toda a aritmética a partir das *propriedades* das operações fundamentais, fácil é de vêr que exactamente as propriedades de adição são as que nos guiam no passeio ao longo da série natural dos números.

Ora aparece aqui uma nota interessantíssima de Borel sôbre a *antinomia do transfinito* no seu belo livro sôbre a teoria das funções.

Vejamos em que consiste essa antinomia do transfinito.

O teorema de du Bois-Reymond afirma a possibilidade de achar sempre uma função crescente $\psi(x)$ maior que qualquer função dum dado conjunto enumerável, φ, de funções crescentes:

$$\psi(x) > \varphi_m(x)$$

qualquer que seja m.

Isto permite evidentemente a formação duma escala de tipos crescentes chegando a esta antinomia: a aplicação indefinida do teorema de du Bois-Reymond só pode fornecer uma infinidade enumerável de tipos crescentes, pois a cada operação poderemos fazer corresponder um número da série natural, de outro lado sempre que se tenha ainda um conjunto enumerável pode ainda aplicar-se o processo de du Bois-Reymond.

Daí a palavra *transfinito* para significar as aplicações sucessivas do processo sempre para àlém do conjunto enumerável.

Compreendemos perfeitamente o infinito dos conjuntos enumeráveis, como compreendemos o transfinito supondo que com êle significamos apenas a possibilidade de exceder toda e qualquer série enumerável uma vez posta.

Deixaremos agora de parte a explicação lógica e metafísica dêstes dois infinitos, como determinações diferentes do *indefinido.*

E vejamos como aponta Borel a significação do princípio de recorrência em face do transfinito.

A indução completa fica no infinito simples ou vai até ao novo infinito do *transfinito?*

Vejamos a demonstração do teorema de du Bois-Reymond.

Sejam as séries de funções crescentes

$$\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x) \ldots.$$
$$\psi_1(x), \ldots \psi_n(x), \psi_{n+1}(x) \ldots.$$

com as seguintes propriedades: o crescimento de $\varphi_{n+1}(x)$ é superior ao de $\varphi_n(x)$; duas funções do mesmo índice $\varphi_n(x)$ e $\psi_n(x)$ coincidem a partir dum certo valor de x; para qualquer valor de x a função $\psi_n(x)$ tem um valor superior ou igual ao valor das funções $\varphi_n(x), \psi_{n-1}(x) \ldots \psi_1(x)$.

Vamos demonstrar que é possível determinar estas funções.

Supunhamos que podemos determinar as n primeiras, verêmos *que se pode então determinar* $\psi_{n+1}(x)$.

Com efeito o crescimento de $\varphi_{n+1}(x)$ é superior ao de $\varphi_n(x)$ e portanto, a partir de certos valores de x, ao de $\psi_n(x)$.

Tomemos, para cada valor de x, $\psi_{n+1}(x)$ igual aos maiores dos valores das funções $\varphi_{n+1}(x)$ e $\psi_n(x)$: a função $\psi_{n+1}(x)$ satisfaz às condições postas.

Seja a série ψ e $\psi_{(z)}$ definida por

$$\psi_{(n)} = \psi_n(n) \quad (1)$$

que dará $\psi_{(x)}$ para todos os valores inteiros de x.

A função $\psi(x)$ é crescente e o seu crescimento é maior que o de $\varphi_m(x)$ qualquer que seja m.

Com efeito, para $x > m+1$, $\psi(x)$ é superior a $\psi_{(m+1)}(x)$ e

$$\frac{\psi(x)}{\varphi_m(x)} > \frac{\psi_{w+1}(x)}{\varphi_m(x)}$$

onde o último termo aumenta indefinidamente.

Pelo teorema de du Bois-Reymond nós poderemos exceder sempre uma série φ de funções crescentes achando sempre um $\varphi_{\omega}(x) > \varphi_m(x)$ e um $\varphi_{2\omega}$ e um $\varphi_{\omega^2}(x)$ sempre superior a $\varphi_{m\omega}(x)$ qualquer que seja m, etc., etc.

De modo que sendo m um número qualquer da série natural é sempre possível passar àlém, e daí a noção de transfinito, há pouco aparecida.

Pode aplicar-se aqui a indução completa?

Ou fazemos corresponder a cada operação (β) de du Bois Reymond uma operação (α) da série natural dos números e não saímos do conjunto enumerável; ou supomos êste transcendido e não poderemos aplicar a indução completa, que só demonstra de n para $n+1$.

Qual a razão dêste limite?

Evidentemente a ausência duma *transitividade* na série das operações (β): não há, pelo menos, a transitividade que passa de n para $n+1$.

Transitividade, *invariante* das operações (β), que ou se demonstra não existir, ou se encontra ainda; mas seja como fôr, a indução só será completa, *aplicável no transfinito*, quando se *construir* o grupo (β) com uma *dada* propriedade transitiva.

A virtude estará agora nesta construção, como esteve sempre nas propriedades da adição ou na lei de formação da série natural dos números; *mas não* *será para o transfinito, como não é para o infinito,* em nenhuma *mágica virtude do processo de recorrência.*

A aritmética, se por um lado assenta em esquemas abstractos tirados da *prática* de correspondências, é por outro lado uma sciência hipotético-construtiva a partir do condicionalismo dos elementos e axiomas basilares.

Êste esquematismo, da prática das correspondências, é o que dá à aritmética as maiores possibilidades de indefinidas construções, sem consulta directa à experiência, no adulto tendo atingido a naturalidade lógica; como é, complementarmente, o nó das dificuldades do pensamento infantil e adolescente, quási inteiramente psicológico, sem ter ainda as amplas e indefinidas possibilidades do pensamento lógico. [1]

Uma criança atinge noções sôbre o mundo moral e físico de uma certa complexidade, ainda quando o seu pensamento numa numeração abstracta (repetição do mesmo acto mental) se perde para àlém de cinco ou seis objectos, reconhecendo, aliás, a falta dum ou mais objectos do grupo pelas qualidades de volume e aspecto do grupo como conjunto e não da sua análise enumerativa dos elementos componentes.

Os juízos da aritmética são, pois, da mesma natureza que os juizos das outras sciências.

A divisão em juízos analíticos e sintéticos, que mergulha raízes na intimidade do pensamento de Kant é infundada, bem como o é a sua divisão em juízos *a priori* e juízos *a posteriori*.

Os juízos são, com efeito, todos analíticos e sintéticos: analíticos em relação ao todo percepcional menos conscientemente elaborado, aos dados do senso

1 A própria lógica social hereditária que a criança recebe a toma em termos de psicologia afectiva em frente ao pai ou educador.

comum, digamos; são todos sintéticos em relação às analogias que o esfôrço de atenção, que os anima, vai encontrar em campos aparentemente separados da riqueza percepcional do senso comum.

Um juízo é sempre uma *abstracção* de dados conexos com o que escolhemos e uma ligação dêste que escolhemos com outros habitualmente dele desligados na apresentação directa ou quási imediata.

E assim todos os juízos são *a posteriori* em relação ao *agrupamento experimental* que *analisam* em partes e *sintetizam* em novas uniões; são *a priori* em relação à experiência que vão informar e que, sem êles, não existiria.

O pensamento é uma permanente filtração da experiência percepcional em *conhecimento* do que existe através da *actividade organizadora do juízo*.

É nêste sentido que poderemos sempre dizer que tudo o que existe é pensamento; é nêste sentido que se deve entender o idealismo que desde a nossa primeira obra classificamos de *criacionista:* o real posto pela actividade do juízo, que, em alongação assintótica e metafísica, nos daria um real criado pelo pensamento divino.

Os juízos scientíficos duma sciência são o filtro da riqueza experimental condensada nos conceitos basilares dessa sciência, conceitos, que por sua vez, foram elaborados por juízos anteriores.

A sciência parte dum certo nível de pensamento que *analisa* e organiza em novas *sínteses:* são os seus dados fundamentais, elementos e axiomas.

Póde partir duma experiência tão geral e comum que ela, condensada nos princípios, quási se baste a um longo trabalho de reconstrução analítico-sintético: é quási o caso das matemáticas.

Pode partir duma experiência, que vai aumentando em elaboração e novo enriquecimento experimental — é o caso da mecânica e da física, etc. — que chegue a uma tal riqueza que a deixe nas condições das primeiras sciências — é o caso da geometria física do Universo, substituindo, absorvendo-as, a mecânica e a física clássicas.

Em nenhum momento do pensamento scientífico, e até em nenhum momento do pensamento vulgar, se pode dizer: «até aqui temos experiência pura, aqui começa a acção das hipóteses elaboradoras; ou até aqui temos pensamento puro, vai agora entrar a pura experiência».

A própria vida é selecção organizadora: é contemporàneamente análise e síntese.

O problema de saber qual nasceu primeiro se o *juízo* ou o *conceito* tem a mesma solução que o problema da sabedoria popular de saber se nasceu primeiro o ôvo ou a galinha. Anteriores aos conceitos são os juízos que os formaram, perdendo-se o primeiro juízo na espontaneidade da selecção organizadora que é a própria vida, como cada galinha é posterior ao ôvo, perdendo-se o primeiro germen nas origens da mesma vida.

Todos os esforços para separar êste *acto único* da vida e do pensamento dão meras soluções verbalistas, como em Kant, como em Leibnitz, etc.

Em Kant, o juízo analítico é o repouso do pensamento, ou o passeio circular e vicioso a dentro do mesmo presídio, e o juízo sintético ou é simplesmente a descoberta minuciosa das linhas de estrutura da nossa intuïção formal ou apenas a afirmação empírica de conjuntos fenoménicos da apresentação directa.

Em Leibnitz não há juízo sintético nem analítico, mas cada mónada é o termo geral duma série, que espontàneamente se desenvolve; a *síntese* é na invenção divina que *reüniu* os compossíveis e os deixou na espontânea *análise* do seu termo geral ou lei.

Como veremos, adeante, mais desenvolvidamente, nós somos e conhecemos apenas *tendências* e a conceptualização do pensamento, ou determinação do real, fez-se sempre pela substituïção de *limites* às tendências seriais *convergentes*.

A grande lei do pensamento e do ser é a lei da *convergência;* mas há sempre um salto para o limite, que introduz uma forma onde caberiam por ventura outras e, como veremos, os históricos e célebres becos sem saída (impasses) do pensamento humano, estão sempre na atribuïção dum dado termo *limite*, onde caberiam outros, e a introdução dêsses outros para expôr a antinomia ou dilema com a afirmação já feita da *unicidade* do primitivo limite.

É simplesmente nesta substituïção de *limites* às *tendências* que assenta o equívoco (abismo em Wundt) de separar as sciências em lógicas e experimentais.

Sim, na matemática a experiência é menos visível por mais comum, herdada fisiològicamente [1], da herança sociológica da tradição, etc.; sim, nas sciências naturais o apriorismo lógico é menos evidente porque recebe, sem as construir, as teorizações das matemáticas, da física, etc.

É o esfôrço tendencial num sentido ou noutro que se apreendeu e fez *limite*, propriedade, *cousa*.

É claro que se fôsse possível estabelecer uma sciência meramente analítica ou sintética *a priori*, pura, possível seria substituir o sábio por uma máquina de combinações; mas o absurdo desta hipótese assim posta, como a sua realidade para as condições particulares dum problema bem limitado, mostra bem o carácter construtivo, criacionista (envolvendo juízos analítico-sintéticos) de toda a sciência.

1 Se Elie de Cyon até quere resolver o problema da métrica euclidiana pela disposição dos canais do ouvido.

A necessidade de referirmos sempre o grupo basilar de cada sciência (Hilbert e as geometrias) a outro para sabermos se êle não envolve contradição, e sua recorrência à pura aritmética, ou à logística [1], demonstra bem que cada *a priori* se fundamenta numa *construção* já feita anteriormente.

E essa construção foi obra da actividade do juízo analítico-sintético.

*

Na actividade scientífica criadora das sciências há *tendências*, que, como já vimos, muitas vezes deixamos pelos seus *limites*.

É assim que nas sciências, em que a *atenção* apenas se *esforça* no sentido de conceptualizar um todo empírico vindo de desatentas experiências seculares, esta tendência deu, como limite, a ilusão de que tais sciências são meras construções apriorísticas; é assim que nas sciências, em que a *atenção* se *esforça* mais no sentido de alargar na *experiência* (quási se diria aplicar na experiência) a conceptualização das sciências anteriores, se tomou o limite e tais sciências foram julgadas disciplinas de experiência pura.

E daí os dois conceitos de verdade e certeza.

À verdade necessária das proposições das primeiras sciências opõe-se a verdade provável, aproximada e sempre contingente, das proposições das segundas, e, paralelamente, para as certezas correspondentes às mesmas proposições.

A certeza e a verdade aparecem qualificadas paralelamente, embora entre as duas sempre se tenha feito uma notável diferença.

A certeza é uma qualidade psicológica do pensa-

1 Onde a experiência mais ampla é ainda.

mento e a verdade é uma qualidade lógica: eis a primeira diferença que é costume fazer-se.

A certeza e a verdade coïncidem em todos os períodos de tranquilidade dogmática, seja, em linguagem de Comte, em todos os períodos orgânicos.

A sua diferenciação deve-se a êsses períodos [1] de metafísica e negação, iconoclastas, destruïdores, que são o único orgulho da inteligência e do espírito humano — momentos únicos em que um homem bem destaca dum porco e uma sociedade de homens duma sociedade de formigas.

O homem tem um sôno mais amplo que o que lhe é marcado pelo ritmo da rotação planetária, o homem dorme, *morre-se;* por êsse sôno, sôbre êle cai um cortinado de sombra inércia, estupidez e mineralização que deixa pequenas fendas de luz aqui e àlém.

Nos momentos da liberdade de julgar fundem-se os conceitos, clausuras de vida, e formam-se os novos vasos que a tomam, recebendo o tumulto das suas ondas exaltadas: neles e por virtude deles surge então a distinção da verdade e da certeza.

A certeza pode ser um estado psicológico que a tradição social modelou nas almas; a verdade é uma nova informação lógica da experiência.

A *certeza* é o passado que, por inércia, parece *insistir;* a *verdade* é a manhã dum astro a doirar a orla dos montes, a subir no canto da cotovia e na apoteose heróica da voz humana, com timbre novo e revivente.

A *certeza* é a pompa, a soberba a tranquilidade assassina dos sacerdotes judeus; a *verdade* é a luz carinhosa e humilde que se demora contente de en-

1 Períodos próprios na errada concepção de Comte; momentos em cada e em todos os tempos, aqueles momentos por onde a liberdade do juízo se insinua nos penhascosos interstícios do preconceito e aumenta e eleva a vida.

contro às crianças, beija e perdoa os pecados das mulheres e tem por único combustível os corações despertos, a *verdade* é o próprio coração da vida a arder de amor na cruz erguida num Outeiro humilde, irradiando ternura na frialdade do Espaço.

A *certeza* é Caifaz, a *verdade* é Jesus; entre os dois o mundo romano pelo cérebro de Pilatos *hesita*, inquire, ansioso e sem a ver, pela *verdade* que desponta.

E cada acto de liberdade é solidário com todos os actos de liberdade, e cada acto de amôr é filho do mesmo universalismo concreto de todas as almas cingidas no amplexo da mesma Unidade.

Esta a *Tradição da Vida* contra a tradição da morte, dum sôno com o único e obsidiante pesadêlo de repetir os gestos desfeitos.

A *certeza* é um estado psicológico de *socius*, vem a ser um estado de alma *totémico*, designando assim aquêle estado de *conformidade* social, que mais se aproxime do mais provável estado das consciências sem individualidade, que é o dos povos primitivos de organização totémica.

A *verdade*, destacada da certeza, é a afirmação de valores individuais, surgindo maiores, de outra estatura e conformidade, acima da linha de nível do pensamento colectivo.

O valor de Sócrates na história do pensamento humano, valor que jàmais lhe foi contestado, porque é condição da dignidade [1] do homem admirar mesmo quando não entende, está exactamente em que também êle foi um revelador.

1 O homem que não *admira* é o único autêntico ateu: topou os limites da sua ridícula suficiência. Um dos fenómenos mais consoladores da história é o esfôrço de justiça para a memória dos homens: a actualidade medíocre confunde sempre o ouro com o latão amarelo, mas história rectifica ou rectificará.

Sócrates revelou que a *certeza* não é no nível da *verdade* e que esta exige um esfôrço permanente da liberdade do juízo; Sócrates ergue contra a *Razão social* o sagrado direito duma Razão eterna em seu assintótico movimento para a *verdade*.

É êsse movimento que bate hoje as praias do grande mar da sciência.

E a audácia mental, o anti-conselheirismo, a heroicidade espiritual de Sócrates [1] é tanto mais quanto se dirige ao que até aí fôra *sagrado:* às próprias noções sociológicas, às próprias categorias de justiça social, que a liberdade do seu domínio interior ameaça.

A verdade destaca-se da certeza, criando uma nova forma de certeza.

Erguida em oposição ao *preconceito* (seria inútil êste prefíxo se os homens soubessem que um conceito é sempre posterior a um juízo que o formou e anterior aos juízos que o respeitem e aos que o hão de reformar: um conceito tem implícitos os dois prefixos *post* e *pre*) a *verdade* tem de apelar evidentemente para a experiência [2].

Assim o primeiro critério de *verdade* será o da harmonia entre o conhecimento e o objecto, ou melhor, a *verdade* será o *conhecimento*, que é a forma mental do objecto.

Para que a *certeza* acompanhe esta evolução aparece a ideia de certeza subjectiva, partindo do carác-

1 Não ignoramos, é claro, leitor inimigo, a aparêucia de que Sócrates foi uma vítima da democracia ateniense, etc., etc. Se êsse leitor entende o que lê, já percebeu que em todas as formas de acção social se pode introduzir a morte de que falo.

2 Sob êste ponto de vista é curiosíssimo observar o que aconteceu com as geometrias não-euclidianas, porque são inovadoras, embora o euclidianismo seja, como vimos, mais próximo da experiência.

ter da qualidade psicológica da *certeza* primitiva, e a certeza objectiva ou verdade.

Mas a definição da verdade pela harmonia do objecto e sua forma intelectual é insustentável, pois que o apêlo para a experiência, que se fez em nome da verdade e para a justificar, não atinge uma experiência pura, mas sempre uma experiência já penetrada de pensamento e é, em suma, a uma harmonia de pensamento que se vai parar.

Harmonia de pensamentos estáticos, que será a Escolástica duma certa vida experimental do pensamento; harmonia *viva*, dinámica, de pensamentos, que constituem a própria alma duma experiência aumentativa, eficaz e fecunda.

A verdade é, pois, um esfôrço para um *renovado* sistema de pensamento, que se diz *conhecimento*, por isso mesmo que, não coïncidindo justalinearmente com as necessidades da prática, chega sempre a limites ou conclusões de aplicação prática, seja, à posse mais perfeita ou menos completa do meio.

A êsse *processus* da verdade corresponde um novo critério de *certeza*, pois que, ao lado das *crendices* ou preconceitos do saber comum, fórmulas fossilizadas de actividade que organizou a experiência, vão surgir as leis e as realidades scientíficas.

O *sábio* crê nas suas realidades com uma *crença* diferente da *crença* vulgar nos objectos do conhecimento comum; mas em todo o caso um ontologismo implícito anima, como muito bem viu Meyerson, o pensamento de todo o sábio.

A *crença* scientífica, como fenómeno psicológico, é o equivalente da antiga *certeza*, que era, em cada e em todas as consciências, a identidade do acôrdo social totémico [1].

1 No significado atrás exposto.

A *crença* do sábio envolve também uma *confiança* social que, em vez de ser espontânea e obrigatória, é escolhida e livre.

O sábio *confia*, e cada sábio é envolvido pela atmosfera da grande sociedade scientífica humana.

Mas, como as secções no contínuo experimental, os córtes ou *isolamentos metodológicos*, são possìvelmente muitos e diversos, os sábios precisam dum acôrdo prévio sôbre a escolha basilar (elementos e axiomas) e sôbre o espírito de método, que é o próprio laço social da *sociedade scientifica*.

É a altura de encontrarmos a aparência do *perfeito arbítrio* nas convenções basilares e o perfeito *acôrdo* no corpo da sciência.

Assim seria se, com efeito, os sábios se contentassem com uma simples ginástica intelectual vazia e gratuita; mas, como há um limite nas acções ou percepções da especulação scientífica, o arbítrio não existe e sòmente a escolha melhor ou pior consoante o génio do sábio, que, por sua eficácia e beleza, impõe tal escolha.

De modo que regressamos ao equilíbrio móvel, perfectível, da *certeza* dentro da *verdade*.

Êsse equilíbrio faz-se precisamente dando, às construções dentro dos elementos e axiomas basilares e com o mesmo espírito metodológico, identidade com o que podemos chamar a *verdade* do corpo scientífico, e deixando fora da certeza e na convenção cómoda de Poincaré, na melhor selecção dos dados da experiência directa da Whitehead, aquela parte da *verdade* que se insinua e se não impõe, porque é escolhida e não construída.

É exactamente essa parcela de convenção cómoda, essa parcela de escolha dentro da máxima racionalização, diremos nós, que é o ponto de inserção das novidades, e revisão dos fundamentos, dos alicerces e o alargamento dos muros para a maior largura das novas construções a fazer.

Em face, pois, duma Razão, órgão do acôrdo social, cuja arquitectónica daria as linhas de compreensão da realidade, levantou a sciência uma nova Razão, órgão do acôrdo social dos sábios, mas órgão cujas produções são analisadas e reconstruídas pelo acto de julgar de cada sábio.

Quere dizer que às categorias colectivas impostas da velha Razão, que os filósofos sempre analisaram e de que Kant foi o mais audacioso e profundo mergulhador, vai substituíndo a actividade scientífica *categorias provisórias*, certas dentro dos limites da sua *posição condicional.*

As categorias da primeira Razão levavam à forca, ao auto de fé, às «impasses» clássicas de Zenão de Eleia, de Sextus Empiricus, de Kant e Renonvier etc.; as categorias da segunda Razão levam ao permanente ensaio do seu valor no crescimento ou decrescimento da sua vida experimental.

É esta Razão, que se vem formando através das civilizações, que, ao adquirir consciência de si com a moderna crítica, se pode chamar a *Razão Experimental.*

Para as sciências duma experiência geral e comum, como a matemática, compreende-se que àlém dos elementos e axiomas basilares baste a actividade construtiva de novas relações para sempre conter e exceder todas as experiências actuais.

Mas para as sciências duma experiência mais complexa e enredada, em que as relações das ocorrências são claramente inexauríveis, claro está que não é tão fácil o método hipotético-dedutivo, ou antes, hipotético--construtivo.

Aqui, no entanto, o mesmo se pode fazer por dois processos intercorrentes: o do isolamento artificial em sistemas e a simplificação pela convergência quantitativa de certas relações fenoménicas, seja, a dupla substituïção de séries quantitativas às séries qualitativas da experiência mais directa e naquelas a substituïção dos limites à fluência das séries.

O próprio isolamento em sistemas não é inteiramente artificial, mas ainda obedece à convergência para zero de certos decrescimentos do *fóco* dum *sistema* para as suas margens, onde se passa ao limite.

A estes arranjos metodológicos acrescenta-se um relativo *nominalismo*, tão vago, aliás, na obra de Poincaré, embora discípulos precipitados dele quisessem tirar a redução da sciência a um simples vocabulário.

O nominalismo que contém toda a sciência vai implícito nas suas definições, e é, com efeito, uma função promotora da *certeza*.

«Se A é um sistema material de espécie (α), e (α) a espécie dos sistemas onde apenas se passam fenómenos mecânicos de movimento, digo que no sistema A se verifica a equação $\frac{dT}{dW} = K$.»

Não se acha nenhuma constante ligando as variações do trabalho e de fôrça viva, diremos que o sistema material não é (α) e formulamos a hipótese que seja (β), sendo (β) a espécie de sistemas onde há fenómenos de trabalho, fôrça viva e calôr.

Salvamos a *certeza* da primeira afirmação pelo cómodo e bem definido *nominalismo* dos ($\alpha\alpha$), ($\beta\beta$), etc., e iluminamos até os caminhos das novas pesquisas, pondo, no exemplo, a hipótese:

$$dT + dW + dC = K'.$$

Em geral qualquer lei scientífica implica a certeza dêste nominalismo.

A caricatura dêste nominalismo estaria, com efeito, em dizer com Le Roy que o corpo, que conhecemos por certas propriedades, não comporta modificações nessas propriedades.

Assim, se o fósforo funde a 44° e uma amostra de fósforo não o faz, é porque não é pròpriamente fósforo, mas um estado alotrópico ou um corpo vizinho.

Êste exemplo mostra como mesmo aqui é o princípio da convergência que nos leva para o estado alotrópico, etc.; mas o nominalismo scientífico não é desta ordem: não basta uma característica a modificar uma classificação a não ser que por um estudo anterior saibamos que ela é como um *carácter dominador*, subordinando e implicando um sistema integrante de relações.

Caminhar para um *nominalismo* extreme seria fazer uma Escolástica scientífica: por exemplo — chamo gases perfeitos aos gases que se comportam segundo a lei de Boyle-Mariotte: todos os gases perfeitos obedecem à lei de Boyle-Mariotte.

Isto seria escolástica pura, não o é precisamente porque o *princípio da convergência* permitiu encontrar as condições que dão a *convergência* dos gases para o *limite* de gases perfeitos.

A certeza, que era absoluta, é-o ainda, mas limitada em seu condicionalismo; a verdade, que era meramente uma verdade de definição, é ainda uma verdade de definição, mas definição a *partir da origem focal das linhas e seguindo essas linhas de convergência do comportamento natural dos fenómenos.*

Eis a essência da Razão experimental, que fez a sciência e se fez ao longo dêsse trabalho.

O início dessa Razão é polémico, é o aparecimento da variação indivíduo na identidade do *socius* totémico.

Dêsse início ficou a tara de guerra que têem todas as discordâncias de pensamento.

Ora a sociedade pesando com a Razão colectiva, de conformidade, sôbre o indivíduo anómalo, ora o *socius* de sociedades parcelares contra o *socius* de outras parcelas da mesma sociedade geral, como nas seitas religiosas ou políticas.

Ainda hoje toda a discussão entre homens rudes e pouco intelectualizados é sempre o início duma rixa.

Numa pequena povoação do concelho de Vila Real conhecemos um caso de assassinato dum homem que ao antagonista, numa discussão insignificante, chamou estúpido.

E aquelas discussões teatrais dos *ursos* da velha Universidade, que tinham sempre como tradicional eficiência um acompanhamento de teóricos murros em cima das carteiras!

E, se uma boa parte das discussões do dia passa sem combate físico, é porque o gesto, o grito, a opressão verbal dão equivalentes à necessária expansão da cólera.

Sob êste ponto de vista, e em incidente, seria curioso observar mais uma vez verificada a interessantíssima doutrina de Diderot no paradoxo do comediante, vendo como os polemistas célebres no jornal, no folheto ou no livro são, quási sempre e fora das exaltações dum grande momento político ou nacional, etc., os mais pacíficos, os menos susceptíveis de agressão e combate físico.

Falamos, é claro, apenas daqueles que, como Fialho, são, ainda que por vezes injustos, altas consciências acusando...

Começai uma discussão deante dum público regularmente numeroso e heis de vê-lo logo na atitude de quem vai assistir a um desafio de box.

Os concursos universitários ainda há bem pouco tinham essa exclusiva atitude polémica, de duelo entre examinando e examinador.

Os mesmos concursos em Espanha conservam o nome revelador de «oposiciones».

Antes que as noções de concorrência e luta pela vida tomassem consciência scientífica pelos trabalhos dos naturalistas, já a real luta tinha espontâneamente marcado certos fenómenos sociais, como especialmente polémicos.

A luta pela compreensão, que é o *esfôrço para a consciência*, [1] é, no homem, a forma essencial e profunda do seu ser psíquico.

Em toda a discussão entre homens vulgares há um desejo implícito de aniquilamento do adversário: se a magia negra existisse com eficácia, e as suas práticas estivessem ao alcance de todos, não sei se muitos homens não tombariam mortos ou enlouquecidos como revindita de próximas discussões anteriores.

O homem é fundamentalmente *escravo* e, como tal, irredutìvelmente *intolerante:* raro o *grupo humano* (fora do grupo de verdadeira formação scientífico-filosófica) que não desejasse para si o domínio sôbre as consciências, ou antes, sôbre o que nelas há de dominável; raro o grupo que, de posse do poder bastante, não instaurasse os autos de fé ou equivalências mais adaptáveis.

E o que Nietzshe, genial artista e psicólogo péssimo e contraditório filósofo, chamava «vontade de domínio» é apenas a vontade de domínio do *grupo* agindo através do *socius,* seu simples instrumento.

Só a sciência criando as novas formas de *certeza* e *verdade* da *Razão experimental* (filosofia scientífica) é tolerante e demonstrativa, levando ao acôrdo sem pressão e por consentimento.

1 Vêr o nosso livro «A luta pela Imortalidade»

Vejam as polémicas scientíficas, vejam a visita de Einstein aos centros de pensamento do mundo scientífico, a sua estada em Paris, por exemplo, e reparem como todos os equívocos se levantam a partir duma determinação convencional dos *elementos* da realidade e princípios originais que se pretende sistematizar.

Podem surgir novas dúvidas, elas serão discutíveis e discutidas sempre dentro dos mesmos princípios.

Outro tanto não pode evidentemente acontecer a qualquer forma filosófica que obedeça a uma Razão fixista e imóvel, quer nas formas do conhecimento como em Kant, quer na matéria do conhecimento como em Comte.

Claro que quando são determinadas as simples formas, como em Kant, uma margem muito mais larga fica à liberdade é à variação: Kant como que descreve apenas os limites dessas variações.

Comte encontrava no próprio mobilismo da Razão humana o princípio do seu imobilismo.

Comte, que, em sciência, pela sua preocupação metodológica das divisões e hierarquias, não recebera o evolucionismo da biologia, vai recebê-lo em genética psicológica.

Embora não admitisse a autonomia da sciência psicológica êle encontra na história do pensamento humano uma lei sociológica, com repercussões psicológicas, e que vem a ser a famosa lei dos três estados.

Um período orgânico inicial de visão teológica do universo, período um pouco idade de ouro da civilização; um período inorgânico, mais negativista que outra cousa, muito pouco simpático, pois ainda teima em viver já apodrecido; e um *último* (!!) e definitivo período positivista, período orgânico, normal, representando a maior idade do homem.

Nêste último período atingido por Comte e alguns felizes discípulos, como o Snr. Teófilo Braga, não haverá discussões: a nova certeza será perfeita, o novo acôrdo imediato, porque reinará o *Facto* e (cá o diz o boticário da minha aldeia...) contra factos não há argumentos.

... De modo que as equações, de grau superior ao quarto, teriam solução, embora não fôsse cómoda pela natural sobreposição dos radicais (abaixo Abel!); o conhecimeuto do Universo reduzir-se-ia ao sistema solar (abaixo a astronomia, a astrofísica, a física de Einstein, a geometria física de Weyl, etc., etc.!) o conhecimento da constituïção química dos astros seria *herética* (abaixo a espectroscopia!); e, em suma, o tribunal dos filósofos positivistas reüniria metòdicamente para a metódica excomunhão dos herejes, vindo talvez a pedir piedosamente o auxílio do braço secular para a sanção jurídica e penal das suas excomunhões.

É claro que para Comte não haveria pròpriamente Razão scientífica a transformar em Razão humana — a Razão é uma entidade metafísica; simplesmente haveria a imagem dos factos na tranqüila superfície das consciências.

Êles não se reflectiram sem deformação porque essas consciências ao princípio não sabiam *pousar* para a boa fotografia: as crianças inquietas mexiam-se; agora, que são adultos prevenidos, vão tranqüilamente receber na serenidade da sua superfície a vera efígie dos bons e autênticos factos.

O positivismo não passa, pois, dum pragmatismo em que a infafibilidade papal de Augusto Comte decretou o critério da selecção e utilidade.

Sob êste ponto de vista toda a obra de Comte é uma invasão das verdadeiras relações entre a filosofia e a política: aparece esta, no critério de utilidade social, a marcar caminho àquela, quando evidentemente o caminho é inverso.