fluência das correntes filosóficas em sua ***teoria da Razão pura e da Razão prática;*** é o que aparece, no próprio Rüssell na confissão de que a mais alta excelência espiritual se encontra nos filósofos onde se faz a harmonia entre o misticismo, que é a interpretação do Sêr em termos de valores, e a sciência, interpretação do Sêr em termos desumanizados, de puro relativismo.

A distinção que Boutroux fazia num livro célebre entre espírito religioso e espírito scientífico, a distinção de Rüssel entre as faces do scientismo e do misticismo dos filósofos, parte da oposição bergsonista da intuïção e da inteligência, etc., representam a acção--reacção das duas tendências da Razão, como função do acôrdo social.

A metodologia scientífica descobriu o processo de acôrdo menos violento, embora a pressão do *sagrado* começasse a aparecer no classississmo [1] da sciência e no seu critério de verdade absoluta.

Onde aparece, e por de mais pesa êste sagrado, terá de reaparecer a *Crítica* filosófica, a *dessacratizar*, seja a Filosofia, como órgão da Liberdade.

Uma das necessidades da Filosofia foi e é o despertar das energias do juízo scientífico petrificados [2] em conceitos absolutistas.

Mas, livres estes regressos de sacratismo opressivo, o acôrdo scientífico faz-se pelo máximo de es-

1 É como veremos o caso da geometria euclidiana tida como *sagrada*, da física de *Newton*, do absoluto do *espaço*, do *tempo*, etc., etc. Aí mesmo, na sciência, o absolutismo, dogmatismo intolerante, tende a reaparecer.

E os fenómenos do espiritismo? A atitude para com Crookes, Wallace, Lodge, etc.? É só cautela legítima, não há covardia e inércia? A sciência, por vezes, quási tem a sua inquisição.

2 Melhor veremos no capítulo em que estudarmos especialmente o progresso scientífico de hoje.

pontânea [1] adesão aos princípios cujas conseqüências levam a percepções comuns (virtualmente ou de facto) a todos os aderentes.

Isto cria um ideal de *conformismo*, que começa a invadir e tenta absorver a antiga certeza *mística* do *sagrado* ou acôrdo por categorias da Razão.

Assim se forma neste filho da velha Razão uma tendência a derrotar o velho pai e conquistar-lhe todos os domínios: é a chamada luta entre o espírito religioso [2] e o espírito scientífico, entre as singularidades duma intuïção mais ou menos mística e a inteligência scientífica, etc., etc.

Por vezes domina o espírito scientífico e então temos os grandes sistemas filosóficos com imediatas tendências sociológicas mais ou menos livres, conforme o grau de consciência libertária a que chegou o espírito scientífico que os anima.

Se, com Comte, predomina a atenção da *Crítica* para as percepções por onde começa e por onde deve acabar o ciclo scientífico, teremos então o *facto* subido a última realidade e será para um *realismo sociológico* que vai tender a nossa visão.

Se, com efeito, tudo são factos e a nossa Razão não é mais que um depósito do que há de comum nos factos, a *realidade sociológica* será ainda mais fatal que a própria *realidade física*, pois esta é contingente nas suas singularidades e aquela é certa no seu formal universalismo.

É êste *realismo sociológico*, temperado, aliás em Comte, pela referência de toda a realidade ao homem e sua acção técnica eficaz, que dá a palha

1 Em parte convencial, como diria Poincaré.

2 *O social* que conserva a forma de *sagrado* é religioso. Êste conflito é, por vezes, e equìvocamente chamado entre a sciência e a religião. A sciência e a religião são cadáveres, a vida é no espírito scientífico e no espírito religioso.

da ideologia dos vários incongruentes reaccionarismos [1].

Mas o espírito da Razão mística desperta e vai inserir o *acôrdo autoritário* na construção do pretendido espírito scientífico.

Em Comte, por exemplo, a fixidez do espírito scientífico petrificado em *dadas* conquistas *scientificas*, oferece estas para categorias colectivas, seja, para o *sagrado* da nova *Autoridade social*.

De modo que da luta entre as duas tendências resulta que misturam suas tintas e nenhuma aparece inteiramente com as suas côres próprias.

Marquemos os seus limites, que é o único processo de caracterizar as tendências.

O limite da tendencia scientífica seria conquistar um universo, que valesse *excluido* o homem.

Se um habitante de Marte chegasse ao planeta e encontrasse as obras de sciência humana deveria ser teòricamente possível que êle arranjasse um sistema de transformação de símbolos e percepções, que os limitam e lhe dão corpo, da nossa sciência para a sua compreensão de longínquo habitante de outro planeta.

A sciência *aspira* a um possível *acôrdo universal;* pretende *realizar* um *acôrdo* humano, onde o homem se possa reduzir à simples percepção dos gráficos dum instrumento testemunha.

O *acôrdo* realiza-se pela forma das leis scientíficas, pelo *nominalismo* que as passa de *prováveis* para *certas*.

Êste nominalismo não poderá, porém, ir até ao ponto de a sciência ficar reduzida a um simples dicionário de convenções, êle é *limitado* pelo acôrdo virtual ou real de percepções-conseqüências.

1 O que existe é real; ¿para que tentar modificá-lo em progresso ou em regresso, snrs. *realistas?*

A sciência implica sempre o *tipo percepcional* humano e não consegue ser inteiramente despida de humanismo.

Êste o limite ideal do espírito scientífico; o limite ideal do espírito religioso [1] é o acôrdo imposto pela pressão social, o *acôrdo* na *Autoridade.*

A sciência tem como espírito de método o pensamento procurando o *livre acôrdo* consigo mesmo e com os outros; a Mística social o *acôrdo* dentro dos *moldes* impostos, revelados pela Autoridade.

E tanto assim é que os movimentos religiosos *revolucionários* são mais obra do que chamamos espírito scientífico contra os formalismos da Autoridade da época, do que obra de qualquer *sacratismo* social.

Cristo, contra as petrificações formalistas e autoritárias de fariseus e saduceus, é a grande voz que já através do Velho Testamento, bradando contra as fórmulas, falara nos profetas, porque o Espírito sopra onde quere e quando quere.

Na própria Igreja os movimentos profundos de vida hão de surgir quási sempre daqueles que à Autoridade da fórmula vão opôr a fôrça impetuosa do puro amor.

Desde os heréticos do Sul da França até aos que na Inglaterra vão até Wiclef, e, por J. Huss na Alemanha, até à revolta de M. Lutero, todos falam em nome do puro espírito cristão contra o autoritarismo romano.

Espírito scientífico abrindo as almas às realidades profundas que a Autoridade esmagava.

Mas espírito scientífico que não encontrara os seus métodos e, uma vez vencedor e organizado, será

1 Religioso pelo carácter *sagrado* da imposição social. Logo veremos que o espírito religioso pode ter e tem uma nova função criadora e libertária.

uma nova *Autoridade*, pesando e medindo a verdade e a vida.

Só o espírito scientífico, criador da sciência, guarda um pouco da sua essência ideal de livre acôrdo.

De modo que nesta luta de tendências parece ser nosso dever auxiliar o desenvolvimento das tendências espirituais de feição scientífica contra todos os retornos ancestrais da Mística [1] intolerante e absolutista.

Assim a nossa actividade filosófica, como organização duma *Teoria da Experiência*, terá apenas de analizar a experiência scientífica para por ela e seu condicionalismo aferir todas as outras experiências.

E a outra tendência não encontrará nenhum equivalente, que, longe de ser inimigo da sciência, a venha completar?

O *acôrdo* por simpatia, o *acôrdo* das nossas sensibilidades pela arte, o *acôrdo* profundo das nossas almas pelo *amor*, ¿não serão *realidades* que valham tanto ou mais que as realidades scientíficas?

A experiência scientífica é a possível experiência de todos, mas ¿não terá cada um uma experiência própria, que, não ofendendo a dos outros, com ela é, no entanto, incomensurável?

Há um *acôrdo* de identidade e um *acôrdo* de diversidade, de que a aritmética e a música são bons exemplos.

¿O *acôrdo* como que aritmético das inteligências no identico vale mais que o *acôrdo* musical das almas no amor?

1 A Mística a que nos referimos é a que marca o carácter obrigatório da Razão colectiva. A Mística, como é conhecida na história, é antes o aparecimento de novidades psicológicas, de explosões da vida interior contra aquela Autoridade — é, dum certo modo, um gesto da revolução scientífica: a explosão da realidade psicológica.

¿A arte e a sciência excluem-se, como afirmou para o renegar a seguir Felix Dantec?

Como *valor sociológico* a sciência venceu porque é a descoberta dum acôrdo livre, uma função de tolerância e paz; ¿não será uma mais alta forma de acôrdo pacífico, o livre acôrdo das almas no amor?

Como *valor de realidade* a sciência impoz o seu determinismo experimental; ¿não haverá outras formas de realidade de que uma mais ampla experiência nos fala?

Antes de mais nada e adiantando a doutrina que tentaremos construir no último capítulo desta obra diremos que o espírito scientífico se nos mostra com a dupla tendência de identidade e diversidade.

Pela identidade procurará reduzir o *novo* ao já conhecido, traduzir todas as imediatas realidades da percepção em mais simples realidades concebidas.

Pela *diversidade* procurará alargar os quadros do real para que o *novo*, embora recomposto e reconstruído com arranjos do idêntico ou elementos, possa caber dentro dêsses quadros.

É atento à experiência percepcional para a fazer experiência scientífica pela elaboração dos seus dados em elementos das suas anteriores construções: quere dizer que a experiência scientífica é sempre móvel e progressiva, levando ao contacto do *empírico* as antecipações lógicas dos quadros scientíficos.

O limite ideal do seu esfôrço de identidade, seria achar o *grupo dos fenómenos* e os seus *invariantes*.

Mas formam êstes um só *grupo?*

O limite do seu esfôrço de diversidade seria substituir à consciência intelectual scientífica uma consciência empírica co-graduada com o todo fenoménico.

Qualquer destas tendências se encontra na ideia de Deus: como detentor da fórmula do Universo nos teísmos que o isolam dêste, como a própria vida universal nos panteísmos, que o fazem a consciência actualmente criadora da multiplicidade fenoménica.

A sciência resulta dum hábil equilíbrio entre as duas tendências, mas nêsse equilíbrio entra a condição dum mínimo de humanismo, que exclui os indivíduos — o que é mais uma prova da sua génese sociológica e do seu papel de função da *certeza* ou acôrdo social.

Mas, graças ao desenvolvimento e diferenciação social, os indivíduos existem e *as suas experiências* reclamam um acôrdo do diverso, como, pela sciência, encontraram o acôrdo do idêntico.

Êsse acôrdo, por exemplo, em relação ao mais contingente que é a sensibilidade, é conseguido pela arte que é uma socialização.

Mas *socialização* permanente, mostrando que cada indivíduo tem em cada momento singularidades insindicáveis e incoercíveis, que só a consciência artística toma e exprime. Dêsse poder de exprimir resulta a socialização e o aparecimento duma Razão estética, para logo modificada por novas expressões, que entra em comunicação social.

¿Quantas sensações passariam sem vida humana, se em seu caminho não tivessem encontrado o artista capaz de as receber e exprimir?

Uma boa parte das riquezas percepcionais, que hoje servem o sábio, foi, no frémito e no torvelinho da vida, descobertas pelos artistas.

O sábio hoje atinge a maior síntese física partindo dum contínuo a quatro dimensões, onde encontrou os *invariantes* dum certo grupo.

E os caracteres que marcam êsses invariantes referem-se a noções de realidades que envolvem o homem e a natureza.

A natureza, como o homem, é uma transitividade: a passagem da natureza, como lhe chama Whitehead, ou a duração concreta de Bergson, é o fundo de toda a vida da natureza e do homem.

Directamente, ela é pura mudança qualitativa; a sciência, por certos aspectos de *convergência* da natureza, introduz a noção de limite e a quantificação.

Mas essa mesma introdução implica que entre o homem e a natureza existe uma analogia e uma diferença — analogia, porque o homem compreende a natureza, diferença, porque, se a consciência empírica fôsse *cograduada* com os acontecimentos naturais, não haveria concepção e previsão scientífica, mas simplesmente percepções actuais.

De modo que o *homem* é mais que um simples instrumento testemunha dos fenómenos, é mesmo mais que a pura percepção dos gráficos dêsse instrumento.

O *homem*, de carne e osso e alma, existe e é uma realidade mais volumosa que as melhores realidades da sciência.

Há que recebê-lo, estudá-lo e aproveitar os valores *sociológicos* e *gnoseológicos* da sciência para tentar uma atitude filosófica de síntese, que, sendo de respeito à sciência obra do homem, seja também de respeito ao homem seu obreiro e criador.

*Sociològicamente*, a nova *certeza*, que esta síntese possa trazer, será de livre acôrdo e não de autoridade; *gnoseològicamente*, o seu método será experimental, isto é, procurará no homem com a mesma lealdade seus íntimos modos de ser como a fizera no universo físico.

Será, então, uma *Teoria da Experiência*, e, como o homem é um ser activo, essa teoria envolverá a Prática da sua acção.

Teoria que chegará a hipóteses prováveis, pois a *certeza* que o nominalismo[1] scientífico permitira é aqui posta de parte.

O grau de probabilidade destas hipóteses deixa a acção suspensa deante da liberdade do homem, que escolherá, entre hipóteses igualmente prováveis, aquela que maior heroísmo e beleza possa conter [2].

É êste o significado do amor do risco de Guyau, como é o significado profundo e sublime da aposta de Pascal.

E assim a filosofia abrange todas as atitudes que històricamente a teem definido, predominando o seu papel de crente da Beleza, órgão supremo da Liberdade.

É êsse platónico esfôrço para o supremo Bem, que dá à filosofia a sua beleza e alta dignidade espiritual.

Dum certo modo, e contra os intelectualistas sem espírito, ela será o poema duma alma.

Será a atitude das almas esclarecidas, acesas e curiosas, humildes e universalistas; como o seu depoimento espiritual e prático sôbre o valor e o significado da Vida.

Entre o sábio que tudo vê, excepto o homem, e o poeta que ingènuamente canta sem aferir o homem pelo Universo, o filósofo terá a tranqüila e humilde atenção do primeiro, de mistura com a profunda alegria e universal simpatia do segundo.

Cada filosofia terá verdade acumulável e que fica; mas será essencialmente, em cada momento, o mais leal, mais solene e sincero depoimento das suas consciências mais altas, activas, indagadoras e humildes.

A filosofia é o depoimento de cada época sôbre o

1 O nominalismo em sciência é a afirmação do isolamento dos sistemas; em filosofia desaparece perante o Sistema.

2 E assim liga a teoria do real com a prática do ideal: o aspecto metafísico com o ético-religioso.

grau da sua cultura e é sobretudo o depoimento das almas mais esclarecidas e leais sôbre a relação entre a consciência moral do homem e a mais provável realidade que a actividade scientífica tenha atingido.

O problema moral apresenta-se para alguns, como Rauh, como um inquérito às consciências mais ampla e humanamente esclarecidas.

O inquérito mais completo e leal, de melhor universalismo concreto, sôbre a realidade e a idealidade, sôbre o ser e o dever a existência e o valor, e sôbre as suas relações verificáveis e hipotèticamente mais prováveis é feito ao longo da história do pensamento e as suas melhores e mais idóneas testemunhas são os filósofos.

Em dependência quanto às sciências, pois destas terá de receber a melhor luz que a esclareça, é a filosofia o mais alto testemunho sôbre o Universo e seu valor.

Daí a alta dignidade do filósofo, *testemunha* do Universo, mais que das construções parcelares, autor das hipóteses sugestionadoras que tantas vezes têem saído da filosofia a servir as novas indagações das sciências.

A verdadeira filosofia tem uma humilde alma profunda de religiosa poesia, e o verdadeiro filósofo, como a árvore pelas raízes, depois de meditar no silêncio, ergue a sua voz em canto e oração, que são a flor e a ascenção, a lírica bruma de seu espírito.

# A ACTIVIDADE SCIENTÍFICA

O PROBLEMA DAS GEOMETRIAS MÉTRICAS NÃO-EUCLIDIANAS — A GEOMETRIA MÉTRICA HIPERBÓLICA — O CÍRCULO E A ESFÉRA — A GEOMETRIA MÉTRICA ELÍTICA — AS TEORIAS DA RELATIVIDADE: A RELATIVIDADE RESTRITA, A RELATIVIDADE GENERALIZADA, A GEOMETRIA DO ESPAÇO — TEMPO GRAVÍFICO E ELÉCTRO-MAGNÉTICO : : : :

A actividade scientífica é hoje a forma mais notável da actividade de pensamento.

Não, evidentemente, porque os homens tenham chegado todos à compreensão do que seja a beleza e a bondade intrínsecas da metodologia scientífica; mas porque a vida das técnicas meramente empíricas se tornou impossível perante o domínio vitorioso e indiscutível das técnicas de origem scientífica.

O culto da sciência é, na maioria dos homens de hoje, indirecto e em reflexão dos utilitários interêsses pelas técnicas, que da sciência recebem vida e crescimento.

É fácil e corrente o encontro com idólatras da sciência; mas é difícil e raro encontrar seus verdadeiros e conscientes admiradores.

Num programa português de refundição e reforma do regimen económico e político da sociedade, um como programa *socializante*, de renovação das categorias sociais, aparece a redução dos cursos universitários a simples cursos técnicos: qualquer cousa como engenharia sem matemática, nem física, nem química, nem geologia, etc.; como medicina, veterinária ou agronomia sem sciências naturais, sem biologia, etc.

Tudo isto talvez para uma composição harmónica com o ritmo de estupidez e ignorância dos que tais reformas preconizam.

É claro que há aqui uma questão interferente e vem a ser a crítica, mais ou menos justa, que à Universidade portuguêsa contém êsse programa.

Se, com efeito, a ideologia do nosso universitário é nula ou, mimèticamente, a do meio extra-universitário em que mais vive, claro está que a Universidade terá sido quási inútil para além da simples preparação técnica, que, em propedêutica, poderia ser ministrada nas escolas especiais.

E, se o verbalismo universitário nada criando deixou os espíritos sujeitos à imposição das categorias sociais duma organização cáduca, natural é o receio de que essa Universidade mantenha os hábitos e automatismos do passado contra o espírito inovador do presente.

Foi o que, com efeito, aconteceu com a tentativa de democratização da sociedade portuguêsa, que nenhum auxílio recebeu da Universidade, antes estorvos e cerrada e inamovível incompreensão.

Passando-se todas as tentativas de reformas *socializantes* em tôrno do problema do trabalho é natural que uma visão diminuta e mingüada veja na Universidade Técnica o órgão do novo pensamento.

Mas não há técnica sem sciência desinteressada: esta precede por vezes de décadas e centenas em sua visão especulativa as úteis aplicações da técnica futura.

Está dito e demonstrado; mas sempre, de novo, se volta a cair nos mesmos êrros, porque a belêza intrínseca da sciência é ainda vedada ao grande público.

A sciência é bela, como uma criação artística, pela harmonia interna das suas obras e pela liberdade graciosa do seu agente.

A sciência é boa pelo novo critério de certeza, que criou e vai desenvolvendo, substituindo, a uma certeza vinculada na passiva comunhão da mesma Autoridade, a certeza do livre acôrdo dos pensamentos na mesma obra de cooperação experimental.

Seja como fôr, quer por sua íntima beleza, quer por seu indiscutível sucesso pragmático, por suas vitórias na acção, é a sciência, como verdadeiro Deus ou como Ídolo, a forma de actividade de pensamento que maior, mais ampla e séria aceitação encontra no meio social.

Vejamos, na acção, essa actividade scientífica.

Analisar as condições, métodos e resultados da sciência, é aprofundar o próprio espírito scientífico.

É claro que um filósofo pode inferiorizar-se a um sábio, quando nessa análise esquece ou ignora os íntimos arcanos da sciência; mas um Poincaré, que estendeu em superfície a sua actividade scientífica e agora *aprofunda* essa sciência, acrescentando-a da nova dimensão da reflexão filosófica, desenvolveu evidentemente o seu próprio trabalho aumentando a iluminação dos caminhos percorridos: como que *requeimou* numa luz mais quente o combustível do primitivo fogo.

Se nós descobrirmos na actividade scientífica a alvorada da liberdade pensante, aplicando-se à obra, sem aliás reflectir sôbre o espírito de seus métodos, antes deixando essa reflexão aos filósofos como Platão, Descartes, Kant e Poincaré, teremos encontrado a hipótese por nós formulada desde o início dêste livro dum desenvolvimento dum novo órgão da função social da certeza ou acôrdo, que chamamos Razão experimental.

Essa hipótese pode não dar, e certamente não dará, os traços genéticos dessa mesma Razão, isto é, não será uma lei de evolução, como a dos tres estados de Comte; mas dará, sim, as linhas gerais da evolução do fenómeno sociológico da *certeza* e conseqüentemente do fenómeno psicológico e gnoseológico da verdade.

Será qualquer cousa como as próprias hipóteses scientíficas: um quadro formal, onde, quaisquer que sejam as causas [1], êstes fenómenos encontram lugar.

Traçar as fases dessa evolução seria uma obra da história e proto-história do pensamento; mostrar na sciência, tomando consciência do seu próprio espírito pela reflexão filosófica, a nova forma da *certeza* e o novo órgão da verdade é que é um trabalho de lógica e metafísica, revelando os cánones daquela certeza e a forma desta verdade.

O primeiro estudo pretenderia dar a embriologia (digamos assim) da Razão experimental, o segundo pretende apenas mostrá-la como tendência no esfôrço scientífico, sem discutir se a sua história é uma criação epigenética a partir duma anterior Razão mística, ou é antes o desenvolvimento invasor, o crescimento daquela Razão a absorver cada vez mais as formas que anteriormente, coexistindo ou não com êle, eram dominantes.

Teremos, pois, de estudar directamente os caracteres da *certeza* e da *verdade* scientífica.

Êsses caracteres vão permitir-nos, então, definir mais perfeitamente o que entendemos pelos termos

1 A Crítica epistemológica pode mesmo substituir ou até destruir a categoria de causalidade.

da Razão experimental, seja, pela actividade funcional, produtora daquela *certeza* e daquela *verdade*.

Pelos caracteres da *certeza* teremos a lógica da sciência, pelos caracteres da *verdade* teremos a contribuïção da sciência para a *metafísica*.

Assim a sciência contribuirá directa e indirectamente para a lógica e para a metafísica.

Directamente pelo que nos revela o seu espírito de método, indirectamente pelo que êsse método nos aponta de restrições à actividade scientífica, delimitando-nos assim o campo, onde devemos procurar as suas actividades complementares.

Não é que a sciência nos vá dividir o Ser em cognoscível e incognoscível, fenòmenal e noumenal, mas que ela nos ensine os limites propositados de sua especulação: o isolamento dos sistemas e a exclusão do humano, para atingir, por um lado, a convergência que permita passar aos limites, e, por outro, a pura objectividade imparcial, onde do homem fique apenas a presença dum «test».

Uma divisão das sciências em racionais e experimentais foi posta mais ou menos por todos os sábios e não é difícil encontrar discussões dos limites das duas regiões ou do lugar que uma dada sciência deve ocupar dentro de uma ou da outra zona.

É esta divisão que teremos de estudar, pois ainda hoje subsiste e constitui o nó górdio da metodologia scientífica.

Um equivalente desta classificação, que pretende eliminar as suas dificuldades por um salto da linha divisória, aparece apontado em muitos pensadores e em Wundt surge claramente com a divisão das sciências em formais e reais.

Esta divisão consistiria em separar o conteúdo da sciência em forma e matéria da realidade.

É filha do pensamento kantista, nisto mais platónico que aristotélico, embora a sua intenção fôsse uma síntese das duas atitudes com maior respeito do lado teórico pelo imanentismo de Aristóteles.

Já veremos o que inutiliza esta divisão das sciências, que não há sciência que não tenha uma forma e uma matéria, e que a matéria não existe em cada sciência senão como um resíduo provisório para uma nova forma, fugindo sempre a matéria deante duma determinação que a *fixe.*

A divisão em racionais e experimentais traria como conseqüência duas ordens de certeza: uma apodítica e perfeita, outra aproximada, contingente e frágil, como seria, em termos de idealismo platónico, a certeza da opinião.

As primeiras dariam verdades eternas e necessárias, as segundas verdades aproximadas e contingentes.

Dum lado a Autoridade duma Razão imóvel, de outro lado o arbitrário dum percepcionismo que o entendimento mal poderia disciplinar.

Mas as próprias dúvidas na situação de algumas sciências mostram como a divisão é falsa e artificial, de modo que não é lícito presumir duma essencial diferenciação scientífica sem a análise, *em vivo,* do trabalho das sciências.

É o que era de esperar, pois uma classificação de sciências quanto à qualidade dos fenómenos, envolvendo a absurda hipótese de que já é fechado o campo da especulação scientífica e nenhuma sciência nova poderá surgir, obriga à divisão pelo critério da metodologia.

Se, com efeito, estamos de posse do verdadeiro método scientífico poderemos ordenar as sciências pelas especificações dêsse método, deixando, em aberto, lugar para possíveis novas sciências, onde o método tomará novas formas específicas.

Mas o espírito dêsse método só *a posteriori* se pode conhecer pela análise do seu funcionamento em concreto e vivo trabalho de construção scientífica.

De modo que qualquer apriorística classificação de sciências é de nulo valor e resulta antes, com efeito, duma análise das sciências conhecidas, que não tomou clara consciência do seu esfôrço analítico.

É o que acontece com a classificação das sciências em racionais e empíricas, supondo que há sciências, meras construções da Razão, e sciências da simples observação e da pura experiência.

Dum lado uma faculdade de imutáveis categorias, dando verdades eternas e necessárias; de outro lado um entendimento, simples catálogo de factos colhidos pela observação ou seleccionados pela experiência.

Como tal Razão só poderia ser uma faculdade *ruminativa*, dando voltas e voltas ao simples conteúdo implícito nas suas categorias, o sistema de verdades eternas e necessárias seria fechado, incapaz de progresso.

Tal entendimento seria apenas de verdades contingentes, incertas: em mobilidade permanente. Dum lado uma sciência perfeita e completa, do outro lado sciências destruindo hoje o que ontem construiram.

Daí o scepticismo dos espíritos mais livres, incapazes de sofrerem o completo domínio duma Razão absolutista, imutável e perfeita, e, por isso mesmo, mais atentos à mobilidade da experiência deslocando as sciências da primeira categoria para dentro da zona das segundas.

Com Hume aparece o negativismo crítico a que Kant pretende responder como positivismo crítico.

O traço de união entre os dois absolutos — da Razão e da Percepção, do social estático e do puro individual, vai encontrá-lo Kant nos *Juízos sintéticos a priori*.

Certos, porque são *a priori*, aumentativos do saber porque são sintéticos; mas, porque a experiência não pode entrar toda na certeza dum *a priori*, dessa experiência entrarão apenas as suas condições gerais, que são as formas da intuïção sensível ou o espaço e o tempo.

E assim cada sciência terá de apodítico aquilo que é a sua informação espacial ou temporal.

A geometria vai aparecer como o caso privilegiado em que aparecem os verdadeiros caracteres de certeza e de verdade scientíficas.

Certeza que resulta do acôrdo dos subjectivismos numa forma comum de intuïção; verdade que resulta do mistério dum mundo essencial, que oferece algo de apreensível à informação daquela intuïção.

O kantismo é, com efeito, uma verdadeira filosofia que assenta as suas bases na análise da sciência: é esta a primeira função da Crítica.

Mas, quando não tivéssemos outra razão para achar insubsistente o depoimento kantista, bastaria o problema levantado pela existência das geometrias não-euclidianas para obrigar a uma nova Crítica da sciência.

Ora é precisamente a propósito dêsse problema que se revelou o verdadeiro espírito do método scientífico nas construções geométricas e, em geral, nas construções matemáticas.

## O PROBLEMA DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Apesar da geometria passar como o exemplo típico duma sciência racional, é sabido que ela teve uma origem empírica e uma história evolutiva conhecida em parte.

O mesmo não acontece, pelo menos tão claramente, com a aritmética [1] onde os conhecimentos históricos se referem já a um notável grau de evolução: o sistema decimal encontra-se já universalmente espalhado.

É certo que esta teve origem na troca, é conhecida a influência recíproca do desenvolvimento comercial [2] e do saber aritmético; mas, para vermos a passagem da troca de um por um para a ideia de correspondência, temos de recorrer à etnografia.

Esta mostra-nos, com efeito, as diferentes partes do corpo *correspondendo* cada uma a cada acto de numerar e sempre na mesma ordem, e passagem para o mesmo método com o indiferentismo da ordem, como que imposto para simples contraprova começando do último objecto para o primeiro.

Daqui, pelo simples agrupamento de grupos iguais num só total, começa a aparecer a noção da relação entre os grupos e a *lei* dessa *relação* ou *formação* dos *grupos:* equivalente do que virá a ser uma lei geral de formação dos números.

Para a geometria nós encontramos até no encantador Heródoto a notícia do seu estado empírico de agrimensura nos povos do velho Egito [3].

Na Grécia ela aparece ainda com um sabor em-

1 Numa álgebra portuguesa do princípio do século XVIII ainda se fala em números *dígitos* e números *artículos*. E o carácter *sagrado* dos números é patente na história de todos os povos antigos e na sua permanente tendência para *ainda* receberem o *sagrado:* os n.os 3, 7, 13, etc., etc..

2 A existência de *indústrias paleolíticas* mostra até onde devemos recuar estas influências.

3 O manual de Ahmês (século XVIII antes de Cristo) além de regras de cálculo aritmético é um tratado de medidas de superfícies e volumes. Os egípcios, os chineses e os indus conheciam casos particulares do teorema de Pitágoras, como por exemplo para o triângulo rectângulo de lados 3, 4 e 5.

pírico e particular, como na velha China para as relações dos lados de *certos* triângulos rectângulos.

Com Tales, Pitágoras e os platónicos começam os métodos gerais; encontramos já o raciocínio sôbre conceitos espaciais em vez da quási experiência sôbre o comportamento dos corpos.

Já no século V antes de Cristo aparecem tentativas duma exposição sistemática da geometria.

Com Euclides, cêrca de 300 anos antes de Cristo, apareceu essa primeira exposição sistemática, que veio até nós e constitui ainda hoje o sistema geométrico ensinado nas escolas elementares.

Foi êsse sistema de Euclides [1], que forneceu a Kant o material para a sua Crítica.

A exposição de Euclides compõe-se de definições, axiomas e postulados.

As definições dariam os elementos da sciência; os axiomas seriam verdades indiscutíveis a aplicar às relações dos elementos e derivados, por construção, dêsses mesmos elementos; os postulados seriam verdades indemonstráveis por outras mais evidentes, embora não tenham a fôrça de evidência dos axiomas.

Era esta pròximamente a ideia que durante muito tempo se fez da geometria euclidiana, é a ideia que vulgarmente dela ainda hoje se faz.

Hoje sabe-se que os elementos últimos são indefiníveis, que os axiomas são simples proposições lógicas e os postulados são indemonstráveis, pois constituem as condições hipotéticas do sistema a construir e as definições *equívocas* dos elementos.

Mas a compreensão desta Crítica resultou apenas da longa e secular discussão do problema que veio até às geometrias não-euclidianas.

1 Como foi a sciência de Newton, que solicitou a sua atenção para o valor duma sciência, que prevê a experiência.

Longa e secular [1], pois que, desde Posidonius (1.º século antes de Cristo) e Proclus até à solução Gauss-Bolyaï, sempre um dos postulados foi discutido.

Os postulados de Euclides, ou antes, os seus equivalentes são os cinco seguintes:

Dados dois pontos distintos existe uma recta à qual êstes pertencem.

Dado um segmento rectilíneo existe uma recta indefinida à qual pertence êsse segmento.

Dado um ponto existe um círculo de raio arbitrário de que êle é centro.

Os ângulos rectos são congruentes.

Dadas duas rectas encontrando uma terceira e com ela formando do mesmo lado ângulos interiores cuja soma é inferior a dois rectos, essas duas rectas prolongadas indefinidamente encontram-se do lado onde a soma dos ângulos é inferior a dois rectos.

Dados dois pontos, êles determinam uma única recta.

Foi exactamente sôbre o quinto postulado que logo após Euclides incidira a atenção dos geómetras multiplicando-se as tentativas de demonstração.

Na última metade do século XVIII d'Alembert dizia que a definição e as propriedades da linha recta e das paralelas constituem o escándalo da geometria, vendo assim que não só o quinto postulado, mas o segundo e o sexto, entram na defefinição de linha recta.

No entanto era em volta do quinto postulado, que se tinham agrupado os esforços demonstrativos como continuaram a agrupar.

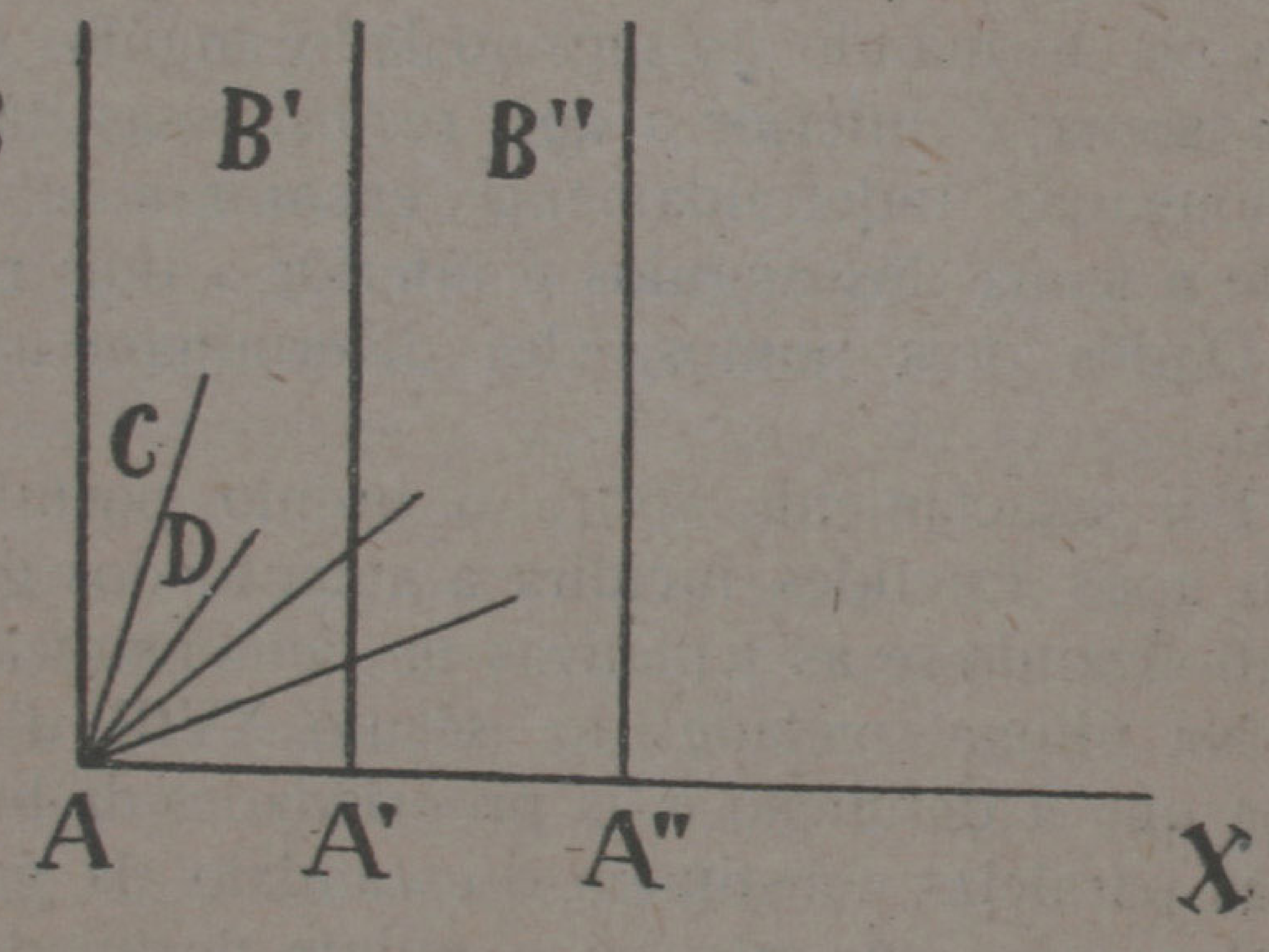
1 Um escritôr português, o snr. Basílio Teles, falava, há pouco e a êste propósito, da crise da geometria. Esta crise vem, como vimos, pelo menos desde o 1.º século antes de Cristo e já acabou pelo menos desde 1823, estando completamente elucidada hoje, como se verá.

Todas as tentativas foram infrutíferas, reduzindo-se umas ao uso de raciocínios viciosos de pronto desmascarados, e outras à substituïção do postulado em questão por outros equivalentes.

Entre os raciocínios viciosos foram muito usados os que recorriam ao uso do infinito, considerado fora do seu *condicionalismo de limite*, e que, pela sedução que exercem nos espíritos desprevenidos, são uma boa prevenção contra o absolutismo dum infinito [1] estático.

Seja

$AX$ uma recta indefinida prolongada para a di-




reita, as linhas $AB$, $A'B'$, etc., prolongadas para cima indefinidamente fazem com $AX$ ângulos iguais, os ângulos $CAD$ são iguais por construção das rectas que os formam.

Para exgotar a área $BAX$ são precisos infinitas

1 O infinito só vale como limite dum processo finito e determinado, fora disto, e como *cousa*, é pura indeterminação.

Eis o que, por vezes, esqueceram alguns pensadores sérios, como Fouillée.

áreas $AA'BB'$, mas um número finito de áreas $CAD$ basta a cobrir a área $BAX$: portanto $AC$ tem de cortar $A'B'$ e o mesmo acontecerá para qualquer recta fazendo qualquer ângulo com $AB$, logo $AB$ é em relação a $A'B'$ *única*.

Eis a *unicidade* da paralela ou o quinto postulado de Euclides.

É claro que a demonstração nada vale, pois *compara* áreas infinitas [1] e fica assim no indeterminismo.

As outras tentativas de demonstração deram postulados equivalentes como o que ainda agora usamos na demontração anterior; ou seja, o da unicidade da paralela ou axioma de Playfair

Os outros são desigualmente importantes, pois revelam a maior ou menor profundidade da análise, complementar da maior ou menor extensão da liberdade construtora fora do postulado.

São êles a coliniação ou conciclismo de tres pontos de W. Bolyaï; a existência de figuras similhantes de Wallis; o valor de 180° de soma dos ângulos dum triângulo rectilíneo e a não existência dum triângulo de área máxima de Gauss.

A não existência de triângulos de área máxima não poderia surgir e não surgiu no espírito de Gauss sem a ideia da existência de tais triângulos.

Veremos que é, com efeito, em Gauss que aparece, antes ou pelo menos contemporâneamente com os outros, a ideia da geometria geral.

Com efeito Lambert, partindo da ideia de Gauss do estudo dos espaços em si e conseqüente característica ou constante espacial $K$, estabelece a fórmula que liga a diferença positiva ou negativa da soma dos

1 A comparação dos infinitos é possível, mas envolvendo a determinação por limites.

ângulos dum triângulo para dois rectos com a sua área e que é $S = K E$.

Nesta simples fórmula estão contidas as tres métricas de Euclides, Lobatchewski e Riemann.

O primeiro caso realiza-se para $K = \infty$; nesse caso não haverá excesso, isto é, $E = 0$.

À medida que $E$ tende pora zero, $K$ tenderá para infinito, pois $S$ tem sempre, em cada *triângulo realizado*, um valor finito, embora sempre maior que qualquer quantidade dada, visto ser sempre possível construir novo triângulo de maior área.

O caso euclidiano aparece já como um *limite* dos outros casos, que se diversificam por $E$ ser positivo ou negativo e portanto, dada a *positividade* das áreas, o $K$ ser também positivo ou negativo.

Outras tentativas de demonstração foram feitas pelo processo da redução ao absurdo que tiveram a dupla virtude de analisar as várias hipóteses e iniciar, portanto, os caminhos das novas geometrias, bem como de marcar o ideal a atingir que seria a demonstração do *não-absurdo* em cada hipótese.

Sôbre êste ponto de vista é interessantíssima a tentativa de Saccheri.

Saccheri supõe uma linha $AB$ e duas perpendiculares $AC$ e $BD$ de comprimentos iguais.

Juntando $C$ e $D$, os ângulos serão iguais; mas tres hipóteses se podem fazer: a do ângulo recto, obtuso e agudo.

A hipótese do ângulo recto dá a geometria euclidiana.

A hipótese do ângulo obtuso e do ângulo agudo são afastadas por contradizerem verdades de Euclides: o que é um círculo vicioso.

Mas, embora afastando ilògicamente as duas hipóteses, sob a pressão autoritária do euclidianismo clássico, Saccheri demonstrou alguns teoremas das geometrias não euclidianas, como achou o valor da soma dos ângulos dum triângulo para as tres hipóteses.

Mostrou que na hipótese do ângulo obtuso duas rectas sempre se cortam, ou que não há rectas paralelas nem rectas não-intersectoras, como demonstrou haver tres espécies de linhas rectas, em relação a uma recta dada, no caso do ângulo agudo: as intersectoras, não intersectoras e duas separando êstes dois feixes e que se aproximam indefinidamente da recta dada.

Lambert chega ao teorema já citado sôbre a soma dos ângulos dos triângulos e à visão de que, a êste respeito, a hipótese do ângulo obtuso se apresenta como a geometria euclidiana da esfera e que no caso do ângulo agudo o mesmo se pode dizer para uma esfera de raio imaginário.

Gauss, homem de espírito livre, chega pelo estudo dos espaços em si à ideia da constante espacial e tem a clara visão da geometria geral; mas, num aristocrático [1] desprêzo dos clamores dos beócios, suspende-se, até que Bolyaï filho, por intermédio de seu pai, recebe o aplauso de Gauss, que diz não o louvar para se não louvar a si mesmo.

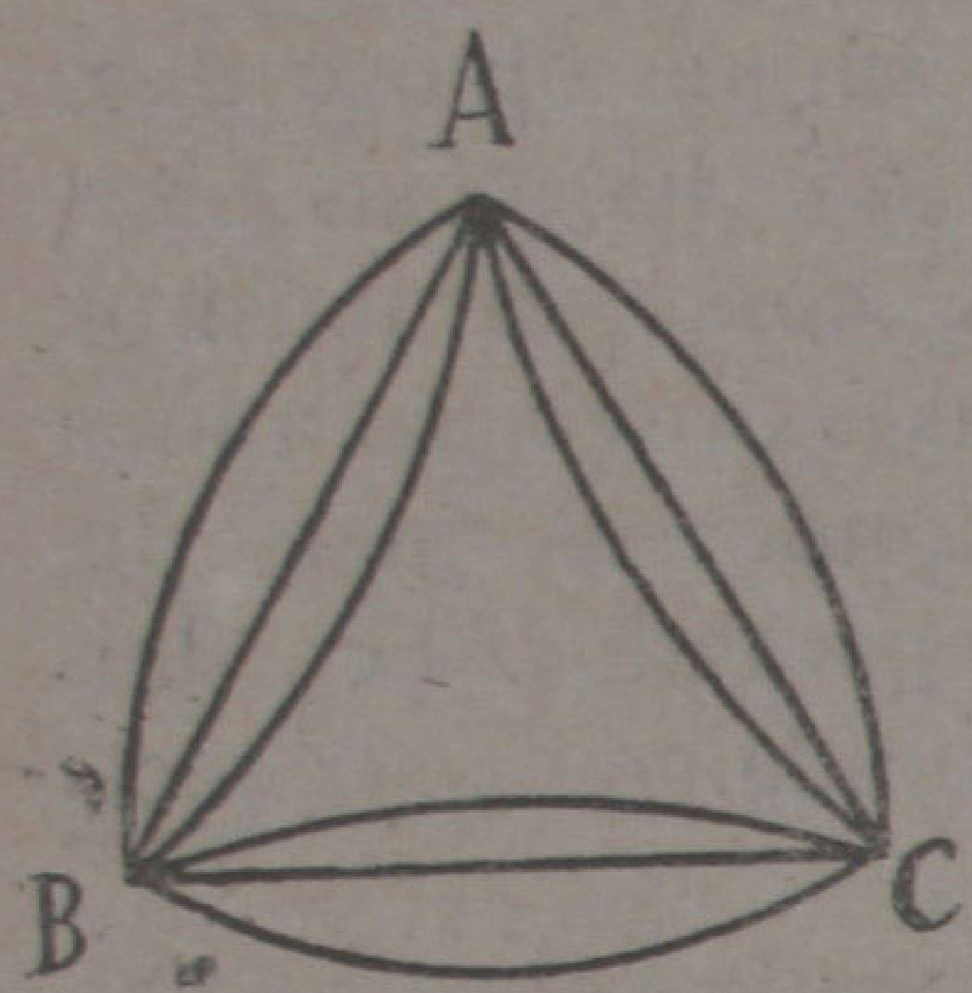
Ao mesmo tempo que Bolyaï filho compreendia o problema, Lobatchewski fundava a geometria do ângulo agudo de Saccheri.

Posteriormente Riemann estuda o caso do ângulo obtuso, que envolve não só a rejeição do quinto postulado de Euclides, mas do sexto postulado; pois as suas rectas são finitas e encerram um espaço, podendo passar por dois pontos uma infinidade de rectas.

Os triângulos das tres geometrias podem, para

1 A aristocracia dos espíritos livres em frente do plebeísmo dos snrs. conselheiros bem pensantes.

simples auxílio da imaginação, ver-se na figura junta, que, no entanto, nada representa mais que uma ilustração-guia, que só no fim da exposição se compreenderá o que significa.

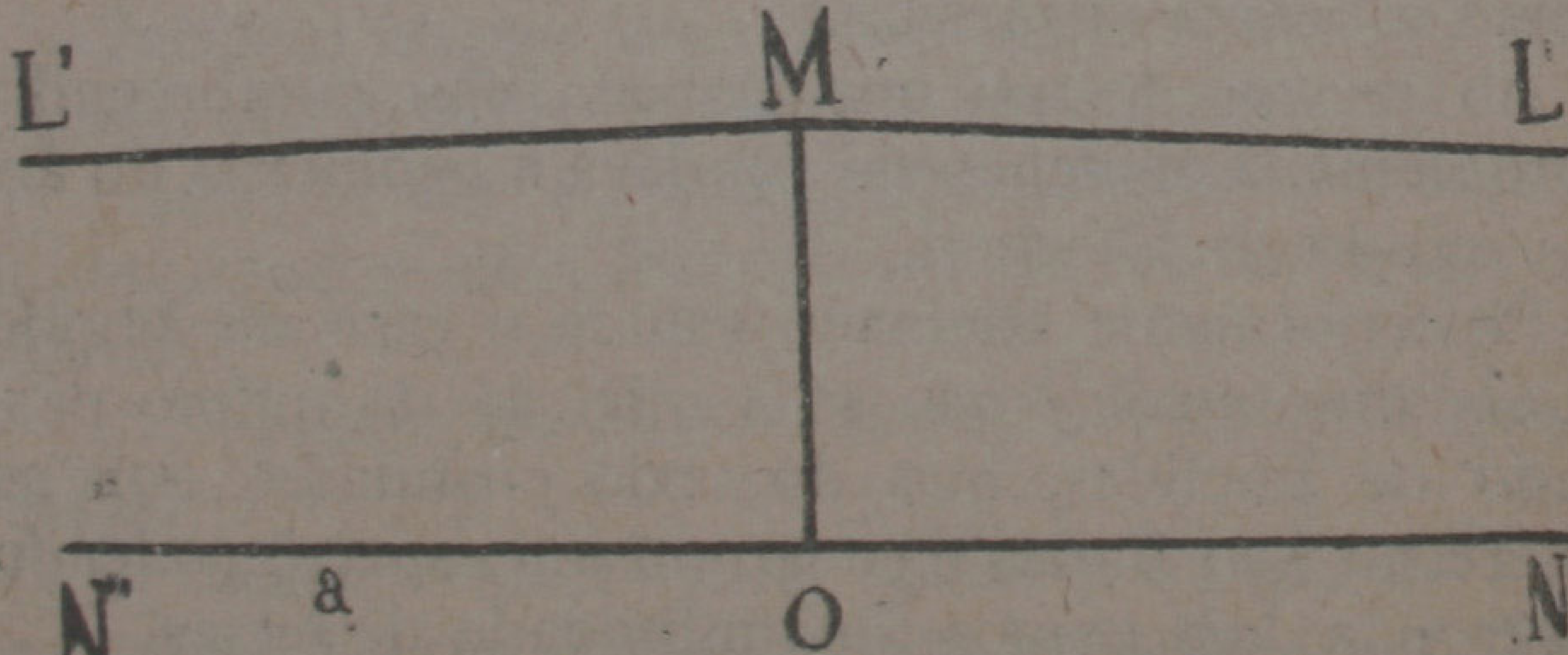



Teremos assim tres geometrias métricas: a de Lobatchewski, a de Riemann e a de Euclides, seja a hiperbólica, a esférica e a parabólica [1].

Para evitar a indeterminação da recta por dois pontos, Klein substituiu, à métrica de Riemann ou esférica, uma que a abrange e onde as rectas são inteiramente determinadas por dois pontos e a que chamou geometria elítica.

## A GEOMETRIA MÉTRICA HIPERBÓLICA

Seja uma linha recta *a* e um ponto *M* fora da recta. Seja *MO* perpendicular à recta *a*.




Seja *N* um ponto de *a* e tiremos *MN*. Suponha-

1 Adiante se verá a razão dêste qualificativo.

mos que o ponto $N$ percorre a linha $a$ para a direita e a seguir para a esquerda. Quando $N$ tende para o infinito no primeiro movimento, a linha $MN$ tende para a posição limite $ML$, e, no segundo, para a posição limite $ML'$.

Suponhamos agora que $ML$ e $ML'$ são duas rectas distintas.

Então, chamando a $ML$ e $ML'$ paralelas a $a$, dum ponto exterior podemos tirar duas paralelas e há dois sentidos de paralelismo.

O ângulo $OML$ ou $OML'$, que por simetria lhe é igual, chama-se ângulo do paralelismo e designa-se por $\pi(p)$ sendo $p$ o comprimento $MO$.

Sendo assim e com os outros axiomas e postulados [1] da geometria ordinária, é possível, e por processos elementares, construir uma nova geometria, em cujo conteúdo não foi possível encontrar nenhuma contradição intrínseca.

Os teoremas mais importantes, no plano, são os seguintes:

A propriedade do paralelismo é transmissível ao longo da linha;

O paralelismo é recíproco e transitivo;

Se uma transversal encontra duas linhas fazendo uma soma de ângulos interiores do mesmo lado igual a dois rectos, as duas linhas nem se encontram, nem são paralelas;

O ângulo exterior dum triângulo é maior que qualquer dos ângulos interiores opostos;

O ângulo de paralismo $\pi(p)$ diminui com o aumento de $p$;

Não há rectângulos;

1 Veremos depois como em Euclides há postulados implícitos que êle não reconheceu e como é possível uma construção por postulados todos explícitos e no mínimo necessários e suficientes.

A distância entre duas linhas que se intersectam aumenta indefinidamente;

A distância entre duas paralelas diminui na direcção do paralelismo e tende para zero, e na direcção oposta ao paralelismo essa distância aumenta indefinidamente — duas paralelas podem, pois, considerar-se como intersectando-se no infinito, sendo o ângulo de intersecção zero;

Duas linhas não-intersectoras têem uma perpendicular comum.

As linhas rectas no plano hiperbólico são, pois, de tres espécies ou comportam-se de tres maneiras diferentes: *intersectam-se*, tendo um ângulo real de intersecção e nenhuma perpendicular comum; *não se intersectam* e têem uma perpendicular comum ou distância mínima mas não formam ângulo real; são *paralelas*, formando o ângulo zero e tendo uma perpendicular comum no infinito.

Dois planos que se intersectam[1] formam um ângulo diedro, que se mede pelo ângulo das duas linhas uma de cada plano que se intersectam e são perpendiculares à linha de intersecção dos planos.

Tres planos que têem um ponto comum intersectam-se aos pares, em tres linhas rectas concorrentes, e tres linhas que se intersectam aos pares são concorrentes ou coplanares.

São importantes teoremas desta geometria no espaço os seguintes:

Se duas linhas são paralelas a uma terceira linha, elas serão paralelas entre si;

Dois planos que passam respectivamente por duas paralelas cortam-se segundo uma paralela às duas paralelas dadas;

1 Elimina-se o contacto num só ponto pela limitação a tres das dimensões do espaço.

Se tres planos se cortam segundo tres linhas $a\,b$ e $c$, tais que $a$ e $b$ nem são paralelas nem se intersectam, $a\cdot b$ e $c$ são perpendiculares ao mesmo plano.

Introduzamos agora as noções de pinceis e feixes de linhas.

Um sistema de linhas coplanares tiradas por um ponto $O$ chama-se um *pincel* de *vértice* $O$.

O sistema de linhas e planos por $O$, no espaço, chama-se um *feixe* de linhas e planos.

Um *feixe paralelo* é formado por um sistema de linhas tais que cada uma é paralela na mesma direcção a uma linha dada.

Designa-se um *feixe* de vértice $O$ por $O$ e um feixe paralelo a $l$ numa dada direcção por $\Omega$; os dois feixes determinam a linha $O\Omega$; dois feixes paralelos $\Omega$ e $\Omega'$ designam a linha $\Omega\,\Omega'$ paralela a $l$ e $l'$.

Introduzindo os pontos do infinito teremos dois dêsses pontos em cada linha e o conjunto dêsses pontos no plano é uma curva cortada em dois pontos por cada linha: que é o *Absoluto*, de Cayley [1].

Quando dois pontos do infinito $\Omega$ e $\Omega'$ se aproximam até à coïncidência, temos uma tangente ao *Absoluto*.

Esta tangente resulta de $\Omega$ tender para $\Omega'$, ou da perpendicular $p$ do ângulo de paralelismo crescer indefinidamente: é, pois, uma linha do infinito.

Do mesmo modo os planos do infinito serão tangentes ao *Absoluto*.

Mas os pontos do infinito, com, é claro, os pontos actuais, não exgotam os pontos desta geometria, sendo ainda preciso considerar outra espécie de pontos que se chamam *ideais*.

Êstes aparecem muito simplesmente.

1 Já veremos o pápel que representa na interpretação de Cayley.

É imediato que, num sistema de linhas em que cada par de linhas fica no mesmo plano, não estando todas no mesmo plano, nem se intersectando nem sendo paralelas, todas as linhas do sistema são perpendiculares a um plano.

Então êste sistema é determinado ou por duas linhas ou pelo plano $\pi$ que elas determinam e chama-se um feixe com o vértice *ideal* $O$, sendo o plano o eixo do feixe.

É fácil determinar uma linha $l$, eixo dum pincel de vértice *ideal* $O$: para um plano todas as suas linhas são perpendiculares à linha $l$ de intersecção dêste com o plano fixo $\pi$.

Os pontos *ideais*, assim definidos, comportam-se como os outros, como se deduz do exposto.

Consideremos os pontos do plano.

Sejam $a$ e $a'$ duas linhas eixos: se $a$ e $a'$ são não-intersectoras, a perpendicular comum pertence aos dois pinceis e é a linha determinada pelos dois pontos $o$ e $o'$ *ideais*, procurados; se $a$ e $a'$ são paralelas, a linha $oo'$ é uma linha do infinito e, se $a$ e $a'$ se cortam, $oo'$ é uma *linha ideal*, formada de pontos ideais.

O mesmo se diz para as tres dimensões e para os *planos ideais*.

Dois pontos actuais, do infinito ou ideais, determinam uma linha, actual, do infinito ou ideal e tres pontos determinam nas mesmas condições um plano.

Se o ponto de intersecção duma linha com um plano se fez no infinito, a linha chama-se paralela ao plano.

Se aquele ponto é *ideal* há, então, uma única linha e um único plano perpendiculares a uma linha e a um plano dados.

São paralelos dois planos cuja linha de intersecção é uma linha de infinito.

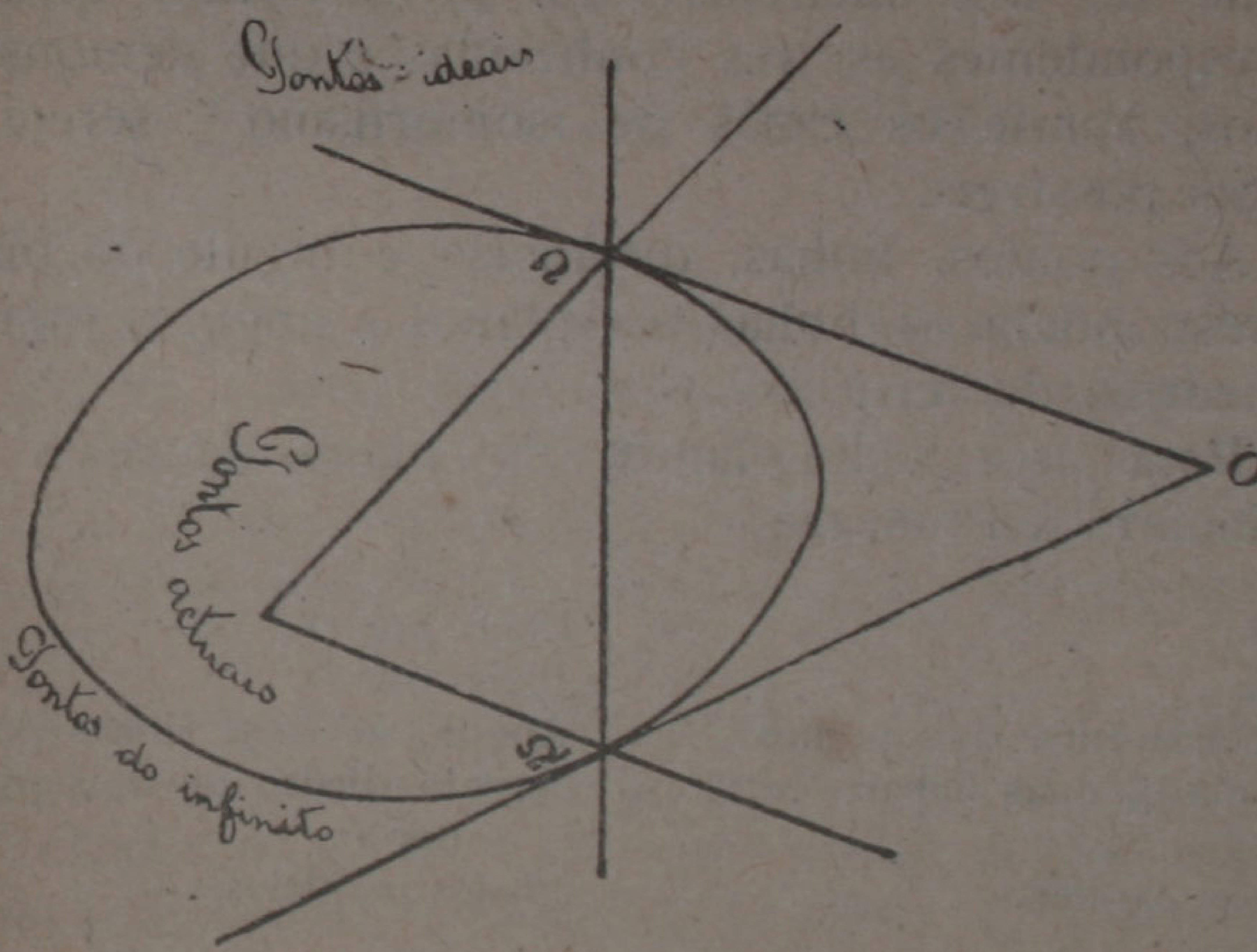
Se aquela linha é ideal, os planos não se cortam e há uma única linha perpendicular a ambos.

Todos os planos paralelos a uma linha dada passam pelo mesmo ponto do infinito; todos os planos perpendiculares a um plano dado passam pelo mesmo ponto *ideal* e cortam-se em pares de linhas dum feixe com vértice *ideal*.

Por uma linha que é paralela a um plano passa um só plano que é paralelo ao plano dado. (1)

E, como conseqüência, por uma linha que encontra um plano *B* num ponto ideal *O* passam dois planos paralelos a *B*.

A distribuïção dos pontos dum plano hiperbólico pode representar-se pela seguinte imagem: [1]




A doutrina que acabamos de expor mostra-nos que o princípio da dualidade se aplica em geometria *hiperbólica*, como, veremos, se aplica na geometria *elítica* e tem até, por motivos que nos hão de aparecer a seu tempo, uma mais larga aplicação do que a conhecida da métrica euclidiana.

1 As figuras são tiradas do livro «Non-Euclidean Geometry» de Sommerville. O texto é extraído dêste autor e dos outros citados na bibliografia scientífica.

No plano hiperbólico acabamos de achar a correspondência entre pontos e linhas no plano e pontos e planos no espaço.

A um plano actual corresponde um só ponto ideal, a um ponto actual um só plano ideal.

O ponto correspondente ao plano do infinito é o seu ponto de contacto com o *Absoluto*.

*Os pontos e os planos são, pois, polos e polares em relação ao Absoluto.*

Esta doutrina vai-nos permitir constatar a revelação a proposito da geometria hiperbólica [1] da possibilidade de tres métricas com propriedades formais correspondentes às tres conhecidas e que demonstraremos, àparte os casos de isomorfismo [2], serem as únicas possíveis.

Aos pontos, linhas, distâncias e ângulo do plano correspondem as linhas, os planos e ângulos (planos e diedros) do feixe por *O*.

Para usar a linguagem do plano, façamos um dicionário à Poincaré:

| | |
|---|---|
| Ponto . . . . . . . . . . | Linha por *O* |
| Linha . . . . . . . . . . | Plano por *O* |
| Distância entre dois pontos. . | Ângulo de duas linhas por *O* |
| Angulo de duas linhas. . . . | Ângulo diedro de dois planos por *O* |
| Linhas paralelas . . . . . . | Planos paralelos. |

Dois pontos determinam uma linha e duas linhas um ponto.

1 Escapou a todos os autores, que conhecemos, justificar êste paradoxo de àcerca duma métrica aparecerem aspectos formais das tres com relação ao postulado das paralelas que já tinha sido determinado e reaparece indeterminado.

A razão está em que os pontos ideais são introduzidos por considerações de perpendicularidade apenas. Daí a reïntrodução dum indeterminismo, onde se *insiram* as tres métricas.

2 Claro é que as isometrias estão dentro dos isomorfismos.

*O* pode estar no *infinito*, ser *ideal*, ou *actual*.

Se *O* é actual, não há linhas paralelas — forma de geometria *métrica esférica* e elítica.

Se *O* é um ponto do infinito, por um ponto (usar o dicionário) passa uma paralela a uma dada linha, que é a tradução do teorema (1) — forma da *métrica euclidiana*.

Se *O* é um ponto *ideal*, por um ponto dado podemos tirar duas paralelas a uma dada linha, que é a tradução da conseqüência de (1) e apresenta a forma da *métrica hiperbólica*.

## O CÍRCULO E A ESFERA

A circunferência é no plano hiperbólico o lugar dos pontos a igual distância (um raio) do centro.

A circunferência, cortando todos os raios de modo a formar um ângulo recto, é a *trajectoria ortogonal* dum *pincel* de linhas com um vértice actual ou real.

Se o vértice se afasta, tendendo para o infinito, as linhas do pincel tendem para o paralelismo e a circunferência tende para uma forma limite, que é uma curva uniforme chamada *horiciclo*.

Em métrica euclidiana o limite duma circunferência, cujo centro tende para o infinito, é uma recta euclidiana perpendicular aos raios: é, como os raios, uma linha recta, aqui é uma curva [1] *uniforme*.

Às rectas euclidianas, noções *primitivas* de Euclides, correspondem os *horiciclos*, noções *derivadas* de Lobatchewski.

[1] Isto prova a maior homogeneidade e resulta da maior homogeneidade do espaço euclidiano, que adiante demonstraremos.

Já veremos que essa correspondência é completa e que há uma métrica dos *horiciclos* nas *horisferas* idêntica à das linhas rectas no plano euclidiano.

Seja o *eixo* dum pincel, cujo vértice será ideal; tiremos perpendiculares ao eixo e nelas tomemos comprimentos iguais — o lugar dêstes pontos será uma *curva-equidistante*, que tende para o *horiciclo*, quando o eixo tende para o infinito.

Teremos então tres espécies de círculos: os *círculos próprios*, de centro real e eixo ideal; os *horiciclos* de centro e eixo no infinito; e as *curvas-equidistantes*, com centro ideal e eixo real.

A esfera é o lugar dos pontos do espaço equidistantes do centro.

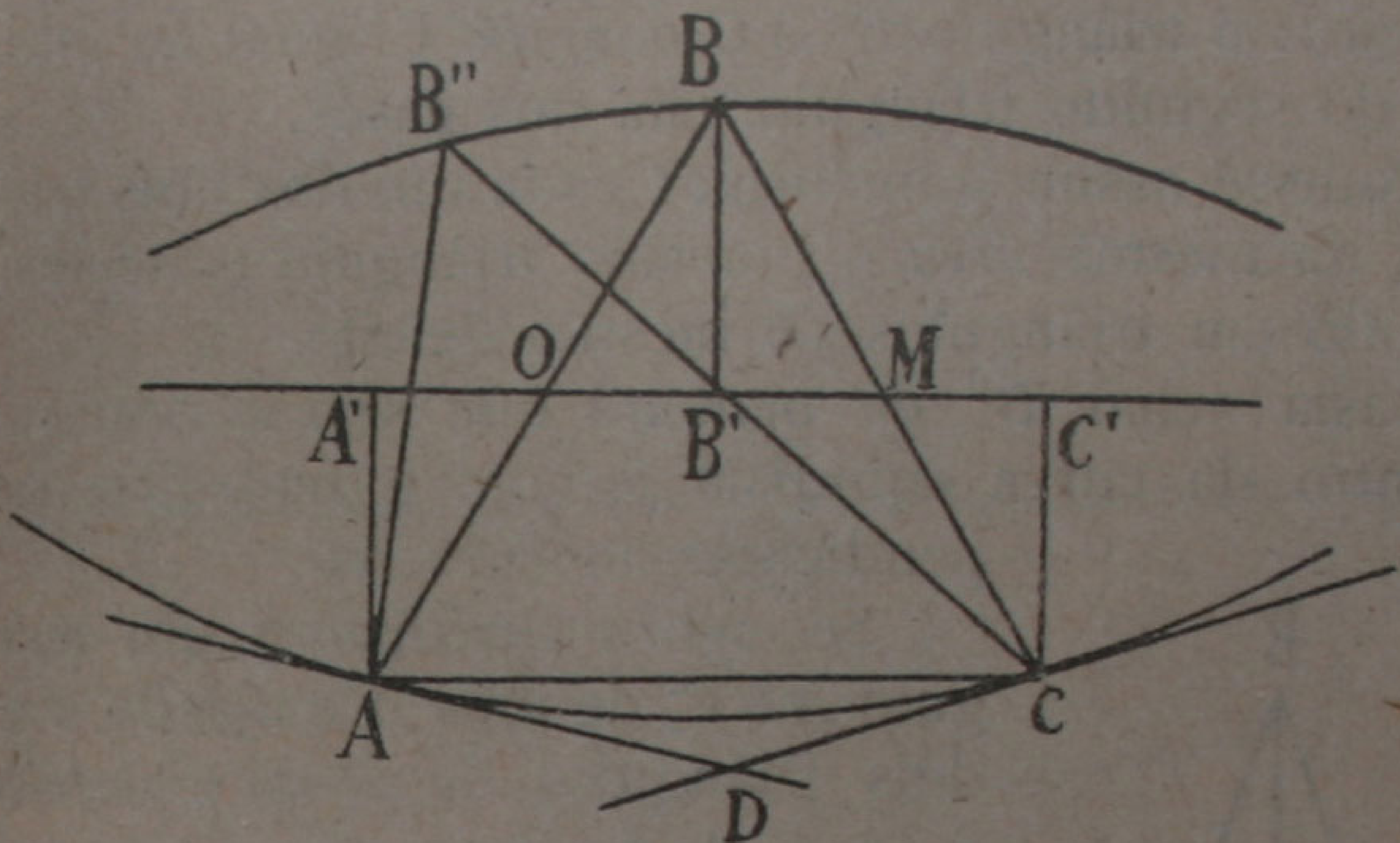
Paralelamente ao que vimos no plano, teremos a *esfera* trajectória ortogonal dum feixe de vértice real, a *horisfera* limite desta trajectória para o centro no infinito e a *superfície-equidistante* com o *centro ideal.*

A secção plana duma esfera é um círculo, a maior é a secção diametral; a secção da *horisfera* é um círculo excepto quando é *normal*, que é um *horiciclo;* a secção da *superfície-equidistante*, que não corta o plano-eixo, é um círculo, se o corta, é uma *curva-equidistante*, se o plano de secção é paralelo ao plano-eixo, a secção é um *horiciclo.*

Poderemos agora demonstrar que a geometria (métrica) dos horiciclos na horisfera é euclidiana e depois introduzir as funções goniométricas e estabelecer a trignometria hiperbólica, que, de novo, nos mostrará novas relações entre as diferentes métricas, apontando a euclidiana, como um *caso limite:* razão, como veremos, da sua primordial importância.

Para isso vamos achar a relação entre o *defeito* para dois rectos da soma dos ângulos dum triângulo hiperbólico e a sua área.

Seja $ABC$ um triângulo e $O$ e $M$ os meios dos lados $AB$ e $BC$.




Construindo a curva-equidistante, as perpendiculares $AA'$, $BB'$ e $CC'$ são iguais.

Teremos

$$A'AO = OBB' \qquad \text{(ângulos)}$$

e

$$C'CM = MBB' \qquad \text{(ângulos)}.$$

O ângulo $A'AD$ será recto.

Daí

$$ABC + BAD + BCD =$$

$$= A'AO + OAD + C'CM + MCD = \pi \text{ (ângulos)};$$

a soma dos ângulos do triângulo $ABC$ será $\pi - 2CAD$, ou $\pi - (A + B + C) = 2CAD$.

A quantidade $\pi - (A + B + C)$ chama-se *defeito* do triângulo.

Ora a área do triângulo é a soma:

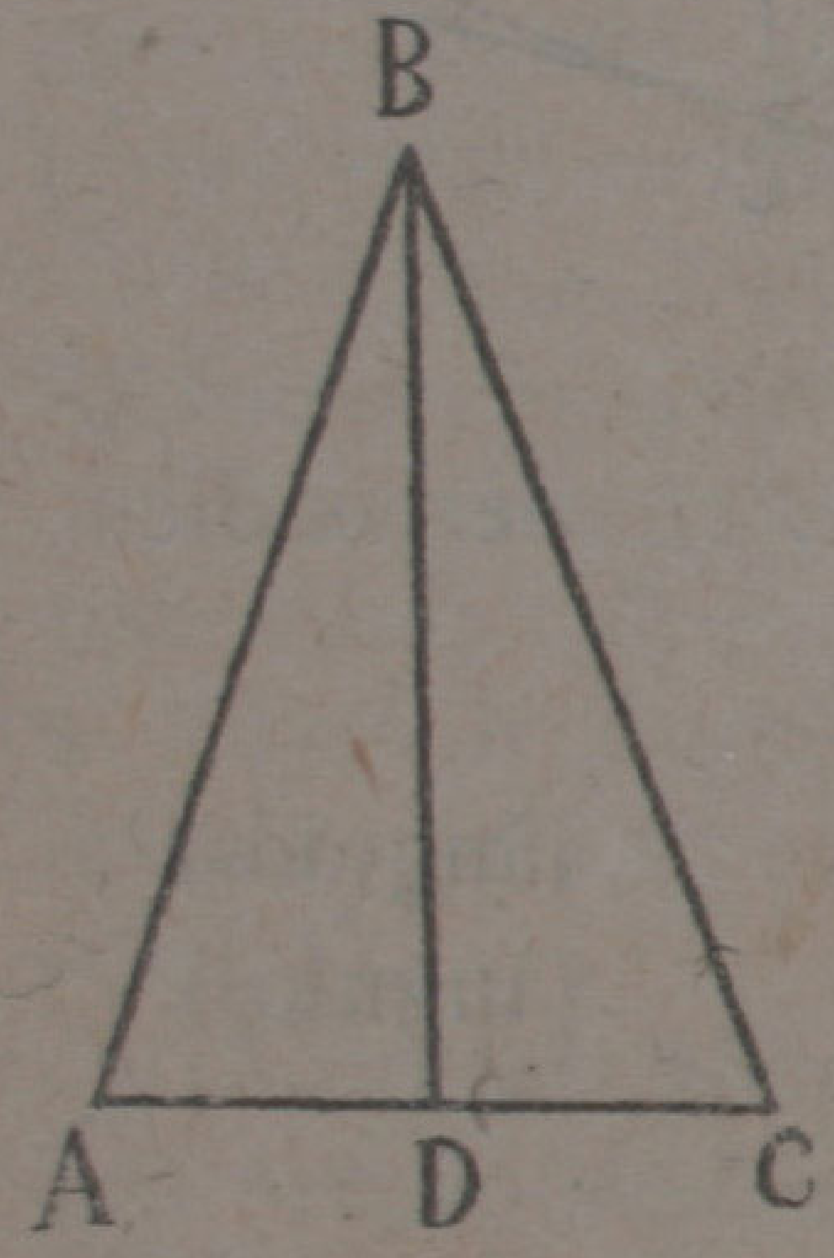
$$AOMC + BOB' + BB'M,$$

e todos os triângulos com a base $AC$ e o outro vértice no outro ramo da *curva equidistante* têem a mesma área e o mesmo *defeito*.

É sempre possível, dados dois triângulos, transformar um deles noutro da mesma *área* e mesmo *defeito* e tendo um dos seus lados igual a um dos lados do primeiro: o triângulo $B''AC$ com $B''C$ igual ao maior lado do segundo triângulo está nos casos.

Pode-se assim transformar cada um dos dois triângulos da mesma *área* no mesmo triângulo isósceles, e portanto em triângulos do mesmo defeito.

Basta achar $B''$ de maneira que seja o ponto de encontro da curva equidistante com a bissectriz perpendicular ao lado $AC$.




Se agora dividirmos um triângulo $ABC$, de *área* $\Delta$ e *defeito* $d$ em dois triângulos de *áreas* e *defeitos* $\Delta_1$ $\Delta_2$ e $d_1$ $d_2$, teremos:

$$d_1 = \pi - ABD - A - ADB$$
$$d_2 = \pi - DBC - BDC - C$$
$$d_1 + d_2 = 2\pi - A - B - C - \pi = d;$$
$$\text{e} \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

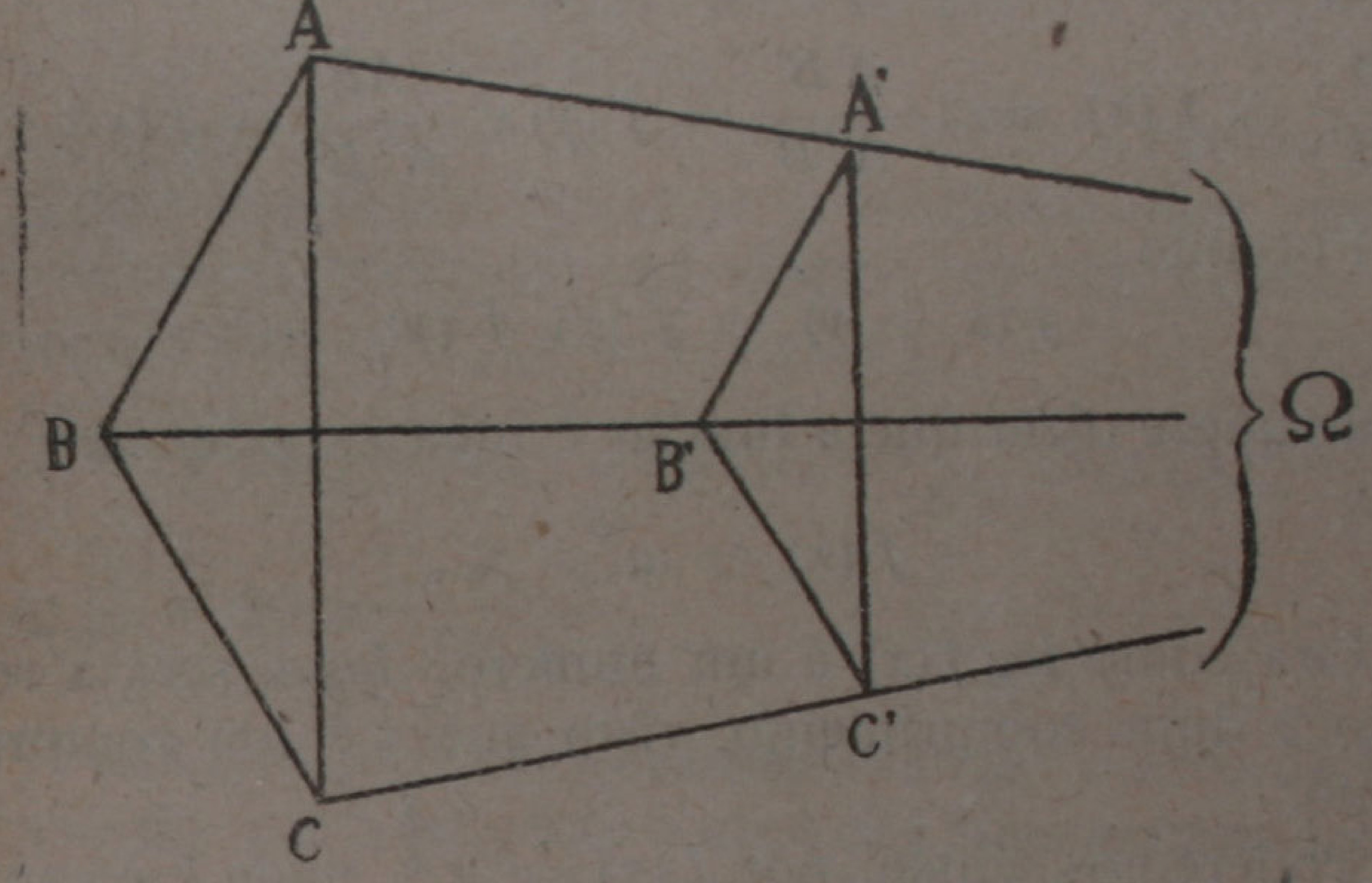
Há, pois, proporcionalidade entre estas grandezas que se correspondem na igualdade e na adição e $\Delta = \lambda (\pi - A - B - C)$.

É fácil agora demonstrar a proposição que procuramos: a geometria dos *horiciclos na horisfera* é a geometria das rectas no plano euclidiano, pois para tais linhas — os horiciclos — podemos agora demonstrar verificado o postulado de Euclides, ou antes, o seu equivalente de Legendre e Gauss.

Sejam $A\Omega$, $B\Omega$ e $C\Omega$ tres paralelas do espaço e cortemo-las por uma horisfera de centro $\Omega$ em $ABC$ e seja $AA' = BB' = CC'$. $A'B'C'$ pertencem também a uma horisfera de centro $\Omega$.

Sejam $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ os ângulos diedros dos planos $BC\Omega$, etc. e $\alpha'$, $\beta'$ e $\gamma'$ e $\Delta$ ângulos e a área do triângulo rectilíneo $A'B'C'$.

Se $AA'$ cresce indefinidamente, os ângulos $\Omega$ $A'$ $B'$, etc., tendem para ângulos rectos e $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ para $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ e $\Delta$ para zero.

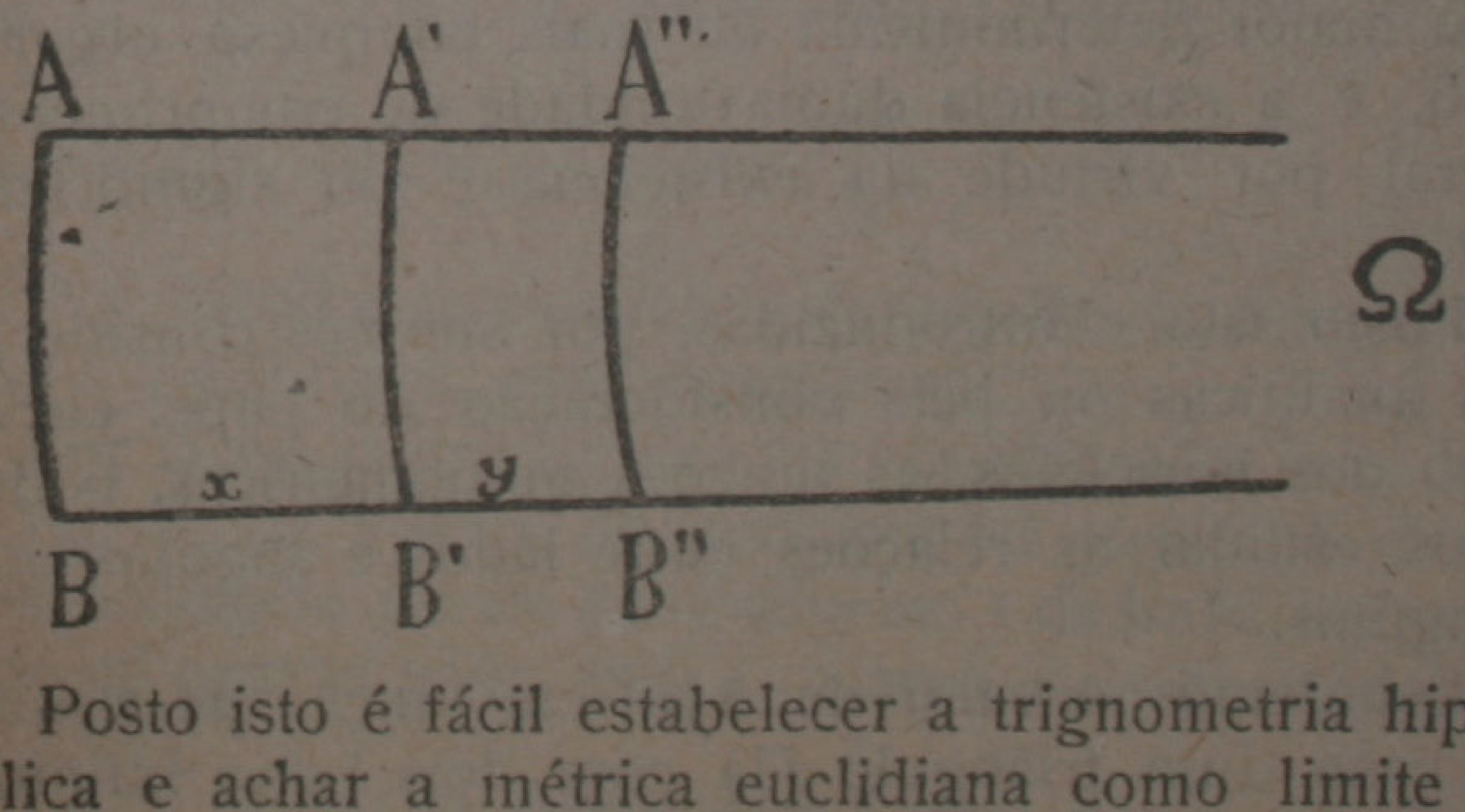



Ora $\Delta = \lambda\,(\pi - \alpha' - \beta' - \gamma')$,

portanto: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

A soma dos ângulos dos triângulos na horisfera de horiciclos como lados vale dois ângulos rectos.

*A soma dos ângulos dos triângulos na horisfera de horiciclos como lados vale dois ângulos rectos.*




Posto isto é fácil estabelecer a trignometria hiperbólica e achar a métrica euclidiana como limite da hiperbólica. Sejam duas paralelas cortadas por horiciclos com centro no infinito.

A razão $\frac{AB}{A'B'}$ depende sòmente da distância $BB'$, e se posermos

$$\frac{AB}{A'B'} = f(x), \text{ será } \frac{A'B'}{A''B''} = f(y) \text{ e } \frac{AB}{A''B''} = f(x+y).$$

Portanto

$$f(x+y) = f(x) . f(y),$$

o que quere dizer que a função é uma exponencial

$$f(x) = a^x.$$

Ora como $\log f(x)$ é um número, $\log a$ será a recíproca dum comprimento, visto que $x$ é um comprimento.

Poderemos, então, pôr $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$, onde $k$ é uma constante absoluta e linear, característica do espaço.

No espaço euclidiano todos os arcos são iguais, e, com $k \to \infty$, $f(x) = 1$; o que significa que podemos achar os comprimentos de paralelas que quisermos, etc.

Aqui aparece um carácter bem próprio das métricas não-euclidianas e que, mais uma vez revelando o seu maior determinismo ou mais complexa organização, é a existência duma unidade de comprimento natural por virtude da existência e do significado de $k$.

Posto isto e introduzidas, por simples considerações analíticas ou pela consideração do papel euclidiano dos horiciclos, as funções goniométricas, poderemos estudar as relações entre lados e ângulos dos triângulos.

Estudemos o valor de $\pi(p)$ em função de $p$, que é o caso dum triângulo (1) com dois lados infinitamente grandes, um ângulo tendendo para zero e outro para recto.

Seja o triângulo (2), tiremos uma perpendicular por um vértice ao plano de (1) e as paralelas pelos outros vértices; cortemos estas linhas por uma horisfera com centro no infinito.

Designemos por $a$, $b$ e $c$ os arcos cortados pela horisfera naquelas linhas e a distância dum vértice do primeiro triângulo ao vértice correspondente do triângulo formado por $a$, $b$, $c$ seja $y$.

Teremos, então, $sen\,\pi(p) = \frac{a}{b}$, $cos\,\pi(p) = \frac{c}{b}$ e

$tang\,\frac{1}{2}\,\pi\,(p) = \frac{a}{b+c}$

Tomemos para comprimento-estalão [1] o arco do horiciclo tal que a tangente a uma das suas extremidades seja paralela ao raio da outra extremidade, então $\frac{b}{a} = e^{\frac{y}{k}}$ e por fáceis construções $\frac{b+c}{b} = e^{\frac{p-y}{k}}$, e, pelo produto das duas últimas expressões, considerando a anterior: $tang\,\frac{1}{2}\,\pi\,(p) = e^{-\frac{p}{k}}$; e, introduzindo analíticamente novas funções, $cotg\,\pi(p) = senh.\,\frac{p}{k}$.

Por escolha conveniente de estalão podemos, enquanto quisermos, considerar $k = 1$.

Por fáceis construções achamos fórmulas que dão, em função de $S$ (arco do horiciclo tal que, etc.), duma certa ordenada $y$ e do comprimento $t$ da linha tangente entre os extremos do arco $s$, o arco $s$ do horiciclo:

$$s = S\ tangh.\ t = S\ senh.\ y.$$

1 Como veremos é o valor de $k$.

Por uma correspondência entre triângulos rectilíneos e esféricos e a consideração dos triângulos formados convenientemeute e chamados triângulos associados é fácil achar as fórmulas que ligam ângulos e lados nos triângulos rectângulos e que são as mesmas da trigonometria esférica usando funções hiperbólicas.

E, considerando as relações já achadas entre umas e outras funções, é imediato que *as fórmulas dos triângulos esféricos*[1] *no espaço hiperbólico são as mesmas que as dos triângulos esféricos no espaço euclidiano.*

Decompondo cada triângulo em dois triângulos rectângulos, e reïntroduzindo $k$, vem imediatamente a fórmula geral:

$$\cos h.\frac{c}{k} = \cos h.\frac{a}{k}\cos h.\frac{b}{k} - \operatorname{senh}.\frac{a}{k}\operatorname{senh}.\frac{b}{k}\cos.C.$$

Fórmula que anteriormente a Lobatchewski tinha sido achada por Taurinus por analogia com a esfera de raio imaginário.

Fazendo tender $k$ para o infinito, esta fórmula dá, em primeira aproximação:

$$1+\frac{1}{2}\frac{c^2}{k^2}=\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{k^2}\right).\left(1+\frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right)-\frac{a}{k}.\frac{b}{k}\cos.C,$$

ou $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C,$$

que é a fórmula geral dos *triângulos rectilíneos euclidianos.*

Vê-se, pois, que a geometria euclidiana é um caso

1 As esferas e os círculos desempeuham um notável papel na relação das tres métricas.

limite, para $k = \infty$, da geometria hiperbólica e, portanto, que, num espaço [1] pequeno em relação a $k$, a geometria é euclidiana.

Se agora acharmos por considerações de análise infinitessimal a área dos sectores circulares

$$\int_{o}^{A} k^2 dA \left(\cos h. \frac{c}{k} - 1\right)$$

chegaremos, para $\int \cos h. \frac{c}{k} dA$, à expressão $\frac{1}{2}(\pi - 2B)$, sendo $B$ um ângulo do triângulo rectângulo, em $C$, $ABC$.

Então a expressão da área do triângulo será:

$$\Delta = k^2 \left(\frac{\pi}{2} - B - A\right) = k^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} - A - B\right)$$

que, comparada com a expressão já achada

$$\Delta = \lambda (\pi - A - B - C),$$

mostra, para ângulos medidos em medidas circulares, $\lambda = k^2$.

Fazendo crescer indefinidamente o valor da área

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C),$$

$k^2$ e $\pi$ sendo constantes, tenderá para zero a soma dos ângulos do triângulo; mas, como enquanto os

1 O mesmo se verá para a métrica elítica, como já se sabe para a esférica, seu caso particular.

vértices forem reais os ângulos serão positivos, a área não poderá exceder o valor $\pi k^2$.

O triângulo de *área máxima* existirá e tem os vértices no infinito e os lados paralelos aos pares.

É a negação do postulado de Gauss equivalente do quinto postulado de Euclides.

Se $\Delta \Rightarrow \infty$ com $k \Rightarrow \infty$, então teremos

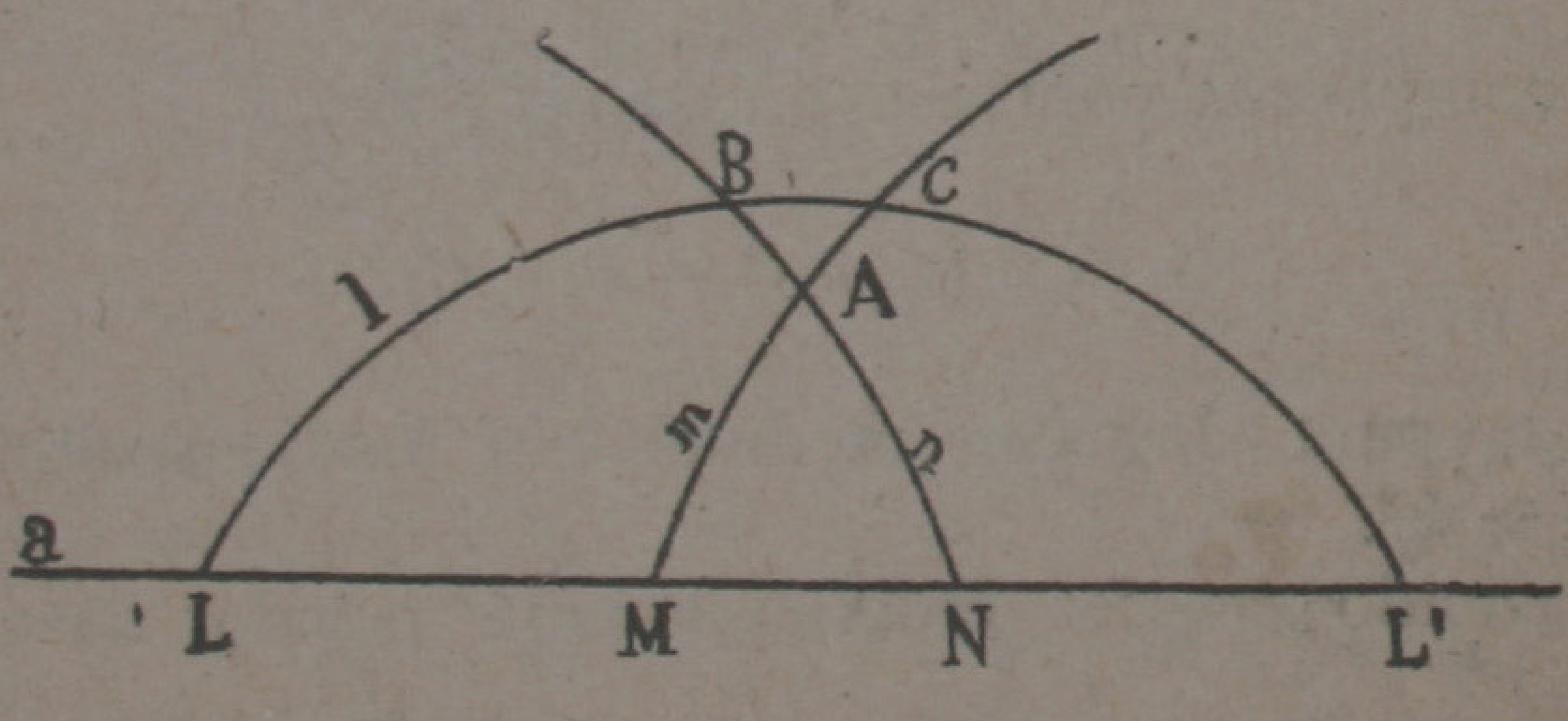
$$1 = \pi - (A - B - C) \quad \text{ou} \quad A + B + C = 2 \textit{ rectos:}$$

reencontramos a fórmula da *métrica euclidiana.*

## A GEOMETRIA ÈLÍTICA

Nos célebres postulados de Euclides ponhamos de parte o segundo, da infinidade das rectas.

Sejam *l*, *m* e *n* tres rectas perpendiculares à recta *a* em *L*, *M* e *N*.




Se prolongarmos a linha $LB$ ela há de reencontrar a linha $a$, seja $L'$ o ponto de encontro.

Então por simetria

$$BL = BN = BL' \quad \text{e} \quad CL = CM = CL',$$

portanto $B$ e $C$ são um só e mesmo ponto; o mesmo se diz para *A* e qualquer dos outros: *A*, *B* e *C* são o mesmo ponto. *A* é o polo absoluto de *a* e *a* a sua polar absoluta.

Se *P* é um ponto de *a*, à distância *AP* chama-se um quadrante e *A* e *P* *pontos conjugados absolutos*.

Agora podemos ainda desprezar o sexto postulado ou recebê-lo para que dois pontos determinem uma só recta. No primeiro caso teríamos a *métrica esférica;* no segundo *A* e *A'* coïncidem e teremos a *métrica elítica*.

Como se vê elas reduzem-se uma à outra pela consideração de dois pontos especiais separados ou coïncidentes.

Esta geometria dá-nos logo uma singularidade para o seu plano: qual seja a de não ser dividido em duas regiões distintas por uma linha recta.

É evidente que, nesta geometria, a cada ponto do espaço corresponde um plano: *polo* e *polar* absolutos.

Sendo um quadrante a distância polar, é claro que, se a polar dum ponto passa por outro, a dêste passará por aquele.

As polares de dois pontos da mesma linha determinam outra linha, e as polares dos pontos desta cortam a primeira linha: todos os pontos da primeira linha distam um quadrante da segunda e vice-versa.

A cada ponto do plano corresponde uma linha e vice-versa.

São estas as relações da geometria euclidiana entre polos e polares duma cónica do plano ou superfície do segundo grau do espaço, que são relações meramente *projectivas*, independentes da métrica.

Portanto, podemos transportar todos os teoremas projectivos para esta geometria, com o cuidado prévio de estabelecer a *geometria projectiva*, independentemente da *métrica* — o que, como vamos ver, é perfeitamente possível.

Duas ordens de pontos são *homográficas* quando a cada ponto $P$ corresponde um, e só um, ponto $P'$.

Duas ordens homográficas podem sempre ser postas em *perspectiva* e as ordens em perspectiva são homográficas.

A *ordem harmónica* é uma ordem de pontos que é conservada na projecção: todas as suas propriedades são transportáveis por esta métrica.

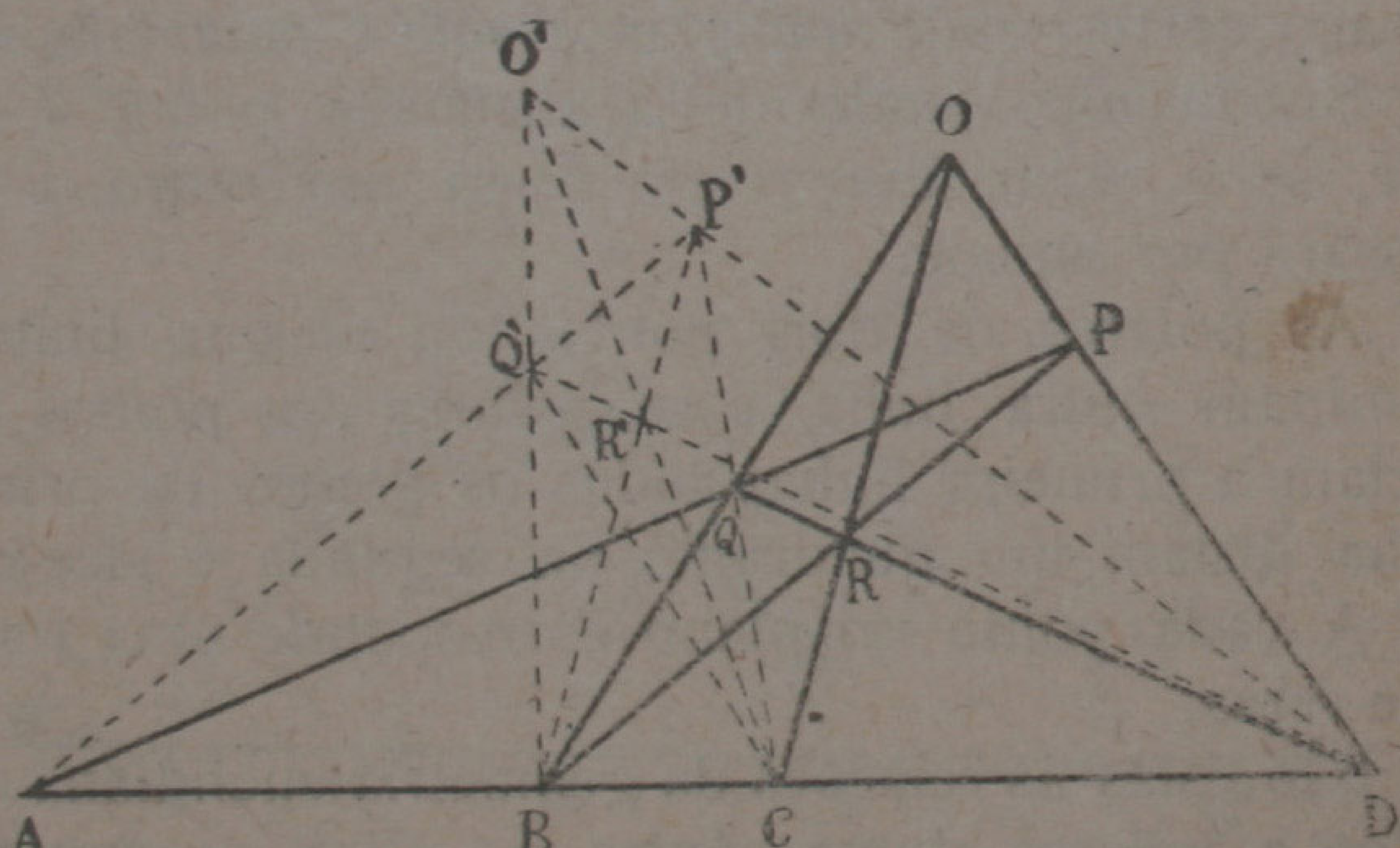
Mas como definir a *ordem harmónica* sem o círculo vicioso do recurso a uma relação de segmentos, isto é, sem a introdução de propriedades métricas?

Pela construção do quadrilátero de von Staudt [1]:

Sejam $A$ $B$ e $D$ três pontos em linha recta, tomemos um ponto exterior $O$ e tiremos $OB$ e $OD$.

Tiremos a recta $AQP$, juntemos $DQ$, $BP$ e $OR$, que encontra $ABD$ em $C$.

Êste ponto $C$ é o ponto procurado.




Para demonstrar que êste ponto $C$ é bem determinado basta aplicar o lema de imediata apreensão, que mostra que os três lados de dois triângulos de dois planos se encontram dois a dois em pontos que estão em linha recta.

1 Bertrand Rüssell.

Posto isto efectuam-se duas construções do quadrilátero em planos diferentes e para o mesmo plano comparam-se as duas do mesmo plano com a mesma terceira dum plano diferente.

As rectas $PQ$ e $P'Q'$ encontram-se por construção em $A$, igualmente $QR$ e $Q'R'$ em $D$ e $PR$ e $P'R'$ em $B$.

Por aplicação do lema veremos, então, que $OR$ e $O'R'$ teem de encontrar-se em um ponto da recta $BD$ que é, pois, $C$.

Os pontos $A, B, C$ e $D$ formam uma *ordem* (proporção) *harmónica* e $C$ é o conjugado harmónico de $A$ em relação a $B$ e $D$.

Admitindo os postulados da continuïdade (claro que é possível uma geometria sem êles; não-arquimediana, por exemplo) poderemos apor a cada ponto um número (sinal) de ordem [1] e repetindo indefinidamente a operação, construcção do quadrilátero de von Staud, teríamos o que pode chamar-se um sistema ordenador de coordenadas, ou um sistema de coordenadas ordinais [2], em correspondência *unívoca* e *recíproca* com os pontos que designam.

Designando os pontos $A$ $B$ e $D$ por 0 (zero) 1 e $\infty$, com Klein, e dando o número 2 ao ponto $C$, teremos a correspondência estabelecida de modo que a definição de ordem harmónica, coïncidindo formalmente [3] com

1 Aqui aparece a primazia lógica do ordinal. A etnografia revela a sua primazia histórica, como igualmente o faz a psicologia infantil.

2 A própria linguagem revela por êste pleonasmo (ordenadas ordinais) que a ordem é anterior ao número.

3 Geometria ordinária: $\frac{1}{AB}-\frac{1}{AC}=\frac{1}{AC}-\frac{1}{AD}$; em simbolismo: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty}$. Comparando: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

a ordinária, é feita sem o uso de segmentos, isto é, *sem a noção de distância.*

Tomando os pontos $B, C$ e $D$, e assim sucessivamente, como os tres novos pontos em relação aos quais se procura o quarto, isto é, fazendo a aplicação da construção von Staud e da convenção Klein, definimos inteiramente o contínuo dos pontos pelo sistema *ordinal* das nossas coordenadas.

É, então, evidente o teorema fundamental da geometria projectiva: se três pontos $A, B$ e $C$ duma linha são projectados em tres pontos $A', B', C'$, é determinada a correspondência entre as duas ordens de pontos.

Se as duas ordens existem na mesma linha e três dos pontos correspondem a si mesmos nas duas ordens, é claro que, pelo teorema anterior, todos os pontos se correspondem.

Duas ordens homográficas da mesma linha só podem, pois, ter dois pontos correspondentes.

Os pontos correspondentes de duas ordens homográficas da mesma linha dizem-se em *involução,* quando se podem dispor em pares de pontos tais que a $P$ corresponde $P'$ e a $P'$ corresponde $P''$, coïncidindo com $P$.

Êsses pontos podem determinar-se numa cónica pelo teorema de Desargues, por exemplo, ou, num círculo, pelas secantes saídas do mesmo ponto.

Para alargar o âmbito destas noções pode introduzir-se a ideia de pares conjugados de pontos imaginários.

Os pontos duplos da involução serão distintos, reais ou imaginários, e coïncidentes, e esta diz-se hiperbólica, elítica ou parabólica.

Sendo dados dois pinceis homográficos de vertices diferentes, os pontos de intersecção das linhas correspondentes é uma curva que será cortada por uma linha em dois pontos reais, imaginários ou coïncidentes.

Igualmente será esta curva a envolvente das linhas que juntam os pares de pontos correspondentes das ordens homográficas. É fácil provar que é a mesma linha a que se chama cónica.

Vamos mostrar que no espaço elítico esta cónica do plano ou quádrica do espaço é imaginária, e, como na geometria hiperbólica, lugar dos pontos do infinito.

Suponhamos um sistema polar num plano com a propriedade de que, quando a polar dum ponto passa por outro, a polar dêste passa pelo primeiro.

Existe então uma determinada cónica, que é lugar dos pontos e envolvente das linhas, que são incidentes com as suas polares.

Seja uma linha $l$ a polar dum dos seus pontos, corta-a noutro ponto cuja polar passa pelo primeiro.

Os pontos de $l$ formam uma involução cujos pontos duplos são incidentes com as suas polares:

Cada linha corta, pois, o lugar em dois pontos e este é uma cónica.

Esta mesma cónica é, também determinada como limite de linhas.

Se, com efeito, $l$ corta o primeiro lugar em $P$ e $E$, as polares de $P$ e $E$ são linhas da cónica, e, como a polar de $P$ não pode cortar o lugar em segundo ponto, ela é tangente à cónica.

O mesmo se diz no espaço para a quádrica.

É assim possível achar uma cónica do plano ou quádrica do espaço, que, neste caso do nosso absoluto sistema polar, tem de ser imaginária, pois um ponto real não póde estar na sua polar.

Esta imaginária cónica do plano ou imaginária quádrica do espaço é o *Absoluto.*

Sejam $P, P'$ e $Q, Q'$ dois pares de pontos conjugados duma linha $g$, que corta o *Absoluto* em $X$ e $Y$. Façamos $Q$ coïncidir com $X$, teremos

$$PX = P'X = PX - PP' \text{ ou } 1 = 1 - \frac{PP'}{PX}$$

e portanto $PX$ tenderá para o infinito: o *Absoluto* é, pois, o lugar dos pontos do Infinito.

A polaridade em relação à cónica do *Absoluto* estabelece o princípio da dualidade.

Êste princípio aplica-se na métrica euclidiana a todas as propriedades independentes das paralelas (projectivas).

É assim que, quando a recta duma figura $(F)$ gira em volta dum ponto fixo, o ponto correspondente da figura transformada $(F')$ descreve uma recta e recìprocamente.

Mas podemos, por exemplo, construir quatro circunferências tocando *tres linhas* dadas e por *tres pontos* só passa uma circunferência.

Em geometria hiperbólica pode alargar-se a aplicação do princípio da dualidade considerando as *curvas-equidistantes* como circunferências e introduzindo os pontos ideais e do infinito.

Mas em geometria elítica o princípio da dualidade abrange todo o campo, porque nesta geometria a *involução* numa linha é da mesma natureza que a *involução* num pincel.

Imediatamente se deduz que nesta geometria há proporcionalidade entre as distâncias e os ângulos polares correspondentes.

$OP$ e $OQ$ são duas linhas com polos $P'$ e $Q'$.

$P'Q'$ será a polar de $O$.

Seja

$$PP' = Q'Q = d, \text{ então } \frac{PQ}{2q} = \frac{POQ}{\pi}$$

ou

$$\frac{d.}{2q} = \frac{\alpha}{\pi}, \; d = \frac{2q}{\pi}\alpha;$$

para $q = \frac{\pi}{2}$ como unidade de comprimento, será $d = \alpha$, sendo $\alpha$ o ângulo das duas linhas.

Dois pontos têem duas distâncias a que correspondem ângulos suplementares, e ao maior ângulo opõe-se a menor distância.

Daqui é muito fácil deduzir a expressão da área dos triângulos.

Duas linhas abrangem uma área proporcional ao seu ângulo $\beta$; a área do plano será pois $2k^2\pi$.

A área dum triângulo será:

$$\frac{2k^2(A+B+C) - 2k^2\pi}{2}$$

ou

$$\Delta = k^2(A+B+C-\pi).$$

Há aqui um *excesso*, correspondente ao *defeito* achado na métrica hiperbólica.

A transformação resulta imediatamente de se tomar a constante $k^2$ com sinais contrários — o que fez vêr por Beltrami a geometria de Lobatchewski como o caso duma esfera de raio imaginário.

Por um método análogo ao usado na métrica hiperbólica é fácil estabelecer as fórmulas da trignometria elítica e demonstrar que a trignometria do plano elítico é a mesma que a trignometria esférica ordinária e que na métrica elítica as *fórmulas da trignometria esférica são as mesmas do espaço euclidiano.*

Como já vimos igual formalismo na métrica hiperbólica, conclui-se que a esfera [1] pode servir para uma relação das tres métricas, que permite assim demonstrar a conseqüência lógica das não-euclidianas em função do sistema euclidiano.

A geometria elítica não tem linhas rectas paralelas no seu plano.

É possível, no entanto, determinar uma superfície em que existam linhas paralelas: é *a superficie de Clifford.*

As linhas desta superfície comportam-se como os horicíclos do plano hiperbólico e como as rectas do plano euclidiano: é para o plano a possibilidade de traduzir umas pelas outras as tres métricas.

*As horisferas do espaço hiperbólico e as superficies de Clifford do espaço elitico têem geometria de forma euclidiana.*

Quais são essas *superficies de Clifford?*

Sejam $a$ e $b$ duas linhas não coplanares e $a'$ e $b'$ as suas polares absolutas: uma linha, que as corte todas, fá-lo em ângulo recto.

Três dessas linhas determinam uma superfície que a quarta linha corta em dois pontos $O$ e $O'$; os dois geradores do sistema oposto por $O$ e $O'$ serão transversais das quatro linhas, que, portanto, cortarão em ângulo recto.

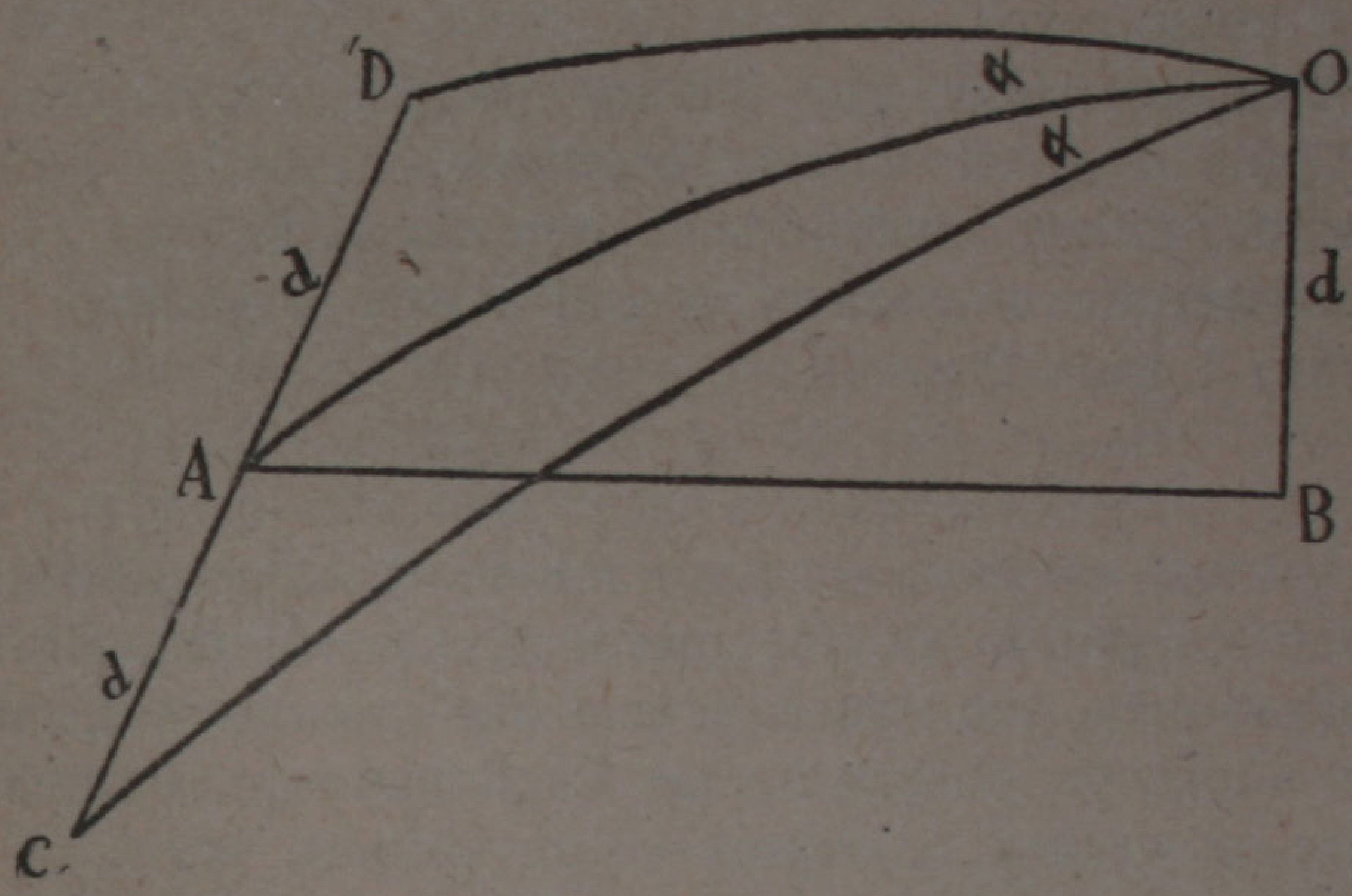
As duas linhas $a$ e $b$ terão, pois, duas perpendiculares comuns, que são polares absolutas, sendo uma *minima* e outra *máxima.*

Se êsses dois limites (perpendiculares) das transversais comuns são iguais, as duas linhas $a$ e $b$ serão não-coplanares equidistantes e terão as propriedades das paralelas euclidianas: são as *paralelas de Clifford.*

1 No plano só há equivalência para o que se poderão chamar as qualidades intrínsecas: é assim que, por uma recta de Riemann, passam indefinidos planos, etc.

Por um ponto $O$ passam duas destas linhas paralelas a uma linha recta dada: a *direita* e a *esquerda*.

No plano $OBA$ tira-se $OA$ perpendicular a $OB$, $A$ será o polo de $OB$ no plano $OBA$. Seja $AD$ a polar de $OA$ que é perpendicular a $BA$, marque-se nela




o comprimento $AD$ e $AC$, para a *direita* e para a *esquerda*, igual cada um a $OB$ ou $d$; as linhas $OD$ e $OC$ são as duas paralelas de Clifford, equidistantes da recta dada com a distância $d = \frac{2q}{\pi} \alpha$.

Estas linhas que também foram chamadas paratácticas só são reais no espaço elítico.

Se, com efeito, $ABDC$ é um dêstes rectângulos, as linhas $AB$, $AC$ e $AD$ não são coplanares. Nêsse caso:

$$CAD + DAB > CAB \qquad \text{(ângulos)}$$

$$\text{e} \quad CAD + DAB + ACD > CAB + \frac{\pi}{2}$$

ou a soma dos ângulos $A$, $D$ e $C$ do triângulo $ADC$

maior que dois rectos — o que só se dá na geometria elítica.

Seja a superfície gerada por uma linha, que corta outra determinada linha (sob o ângulo constante $2\,\alpha$) e é *paratáctica* (em *parataxia*) a outra dada linha, aquela será uma superfície de revolução tendo $AB$ e a sua polar como eixos.

Esta superfície, que é a *superficie de Clifford*, cortada ao longo de duas geratrizes é coberta duma rede de linhas cortando-se segundo o ângulo $2\alpha$ e formalmente comparável a um *rombo euclidiano* do mesmo ângulo $2\,\alpha$.

Vimos, ao vivo, em pura actividade, o pensamento scientífico pondo as tres métricas, hiperbólica, elítica e parabólica, em conseqüência das dúvidas e discussões sôbre os postulados de Euclides; primeiramente sôbre o quinto e depois sôbre quinto, segundo e sexto.

O pensamento liberto do *dogma euclidiano*, em vez de se perder no impossível esfôrço de demonstrar o indemonstrável dentro daquele sistema lógico, caminha *construindo* com outros postulados.

Desde já podemos dizer que, se o pensamento trabalhasse em pura criação no vazio, em vez de três métricas, poderia e deveria ter encontrado indefinidas.

É o que, com efeito, é possível ao pensamento: achar indefinidas formas de expressão para um sistema de relações.

É o que apresenta, como mais adeante veremos, a distinção profunda e radical entre o *espírito* e a *matéria*, se a esta palavra quisermos ligar alguma ideia de realidade.

Esta relação multi-una do espírito com as realidades materiais tem uma outra face complementar de relação uni-múltipla [1], que permite o processo que os lógicos chamam a abstracção.

Porque o espírito pode substituir, a um sistema de relações, indefinidos sistemas, é que êle pode libertar dum sistema a sua *forma* para a aplicar a outra *matéria*, pois que uma *só forma* jàmais saïria da matéria com que aparece soldada.

A essa forma o espírito substitui outra equivalente em que a matéria informada perde a *significação* e *pode* ser qualquer. Êste qualquer é o indefinido, mas nunca o infinito; pois toda a forma *informará efectivamente* um número finito de *matérias*.

Enquanto *indefinido* é ainda um estádio inferior do conhecimento, um como que conhecimento virtual. *Definir êsse indefinido é achar as realizações do possível.*

Ora em geometria êsse possível é indefinido como méra forma, mas se damos a essa forma uma matéria teremos de limitar o possível.

É assim que o simples possível aparece em geometria métrica nas indefinidas possibilidades da escolha de unidade; mas o actualizável, isto é, a medida, terá de aparecer num número finito de formas.

Com efeito dentro de cada espaço, euclidiano, hiperbólico ou elítico, há indefinidas variedades possíveis de métrica; mas há apenas um *género*, a *Métrica*, com as tres *espécies* até agora descobertas. Que o número das espécies tinha de ser limitado é o que é evidente depois do que dissemos; mas nenhuma razão apriorística nos aparece que justifique esta trindade [2].

1 A relação uni-una ou multi-múltipla em que são idênticos os *uns* da direita e da esquerda e igualmente os *uns* que na segunda expressão se fazem corresponder à direita e à esquerda é que não existe. Seria a requerida pelos materialistas...

2 O saciatismo do número ainda reaparece, por vezes, em espíritos sérios que a propósito das tres dimensões do espaço, das tres métricas, etc., etc., falam da *santíssima trindade*.

¿Porque haverá precisamente *tres* métricas, seja, porque haverá só *tres* espécies de *distância* ou *tres* espécies de deslocamentos possíveis sem deformação?

Aqui mais uma vez vamos ver que a *qualidade* antecede a *quantidade* [1].

Será a partir da *geometria projectiva* que encontraremos a possibilidade de uma geometria geral, que, induzindo simples expressões projectivas, inclua as três métricas, euclidiana, hiperbólica e elítica, e só possa conter estas *tres* espécies.

Nessa geometria entrarão apenas expressões projectivas e nestas as que deixem inalteradas as distâncias e os ângulos, tendo achado a expressão de distâncias e ângulos em termos projectivos e apropriadas constantes.

Destas fórmulas se deduzirá o limite, a tres, do número de métricas possíveis.

Nós podemos estabelecer um sistema de geometria analítica elítica, que, por mudança do sinal de $k^2$, dá a hiperbólica e no limite da tendência de $k$ para infinito dará a euclidiana.

Tomemos dois eixos rectangulares e as perpendiculares dum ponto sôbre êstes eixos sejam $u$ e $v$, e $r$ a distância da origem ao ponto, e $\vartheta$ o ângulo desta recta com o eixo dos $xx$. Introduzindo $k$, *teremos:*

$$sen\frac{v}{k}=sen\frac{r}{k}cos\ \vartheta,\ sen\frac{v}{k}=sen\frac{r}{k}sen\ \vartheta,$$

e, para um ponto de $OP$, $sen\ \frac{v}{k}=sen\frac{v}{k}\ tang\ \vartheta.$

Para uma linha qualquer tira-se a perpendicular

1 Lembramo-nos, com piedosa cautela, das aberrações dos que, como Dantec, tudo queriam reduzir a pura quantidade.

de $O$, $ON=p$, $e$, se $P$ é um ponto da linha de coordenadas $u$ e $v$, teremos:

$$tang\ \frac{p}{k}\cos\frac{r}{k}=sen\ \frac{u}{k}\cos\alpha+sen\ \frac{v}{k}\ sen\ \alpha,$$

função linear e homogénea para

$$sen\ \frac{u}{k},\ sen\ \frac{v}{k},\ \cos\frac{r}{k}.$$

A transformação dada por

$$x=k\ sen\ \frac{u}{k}=k\ sen\ \frac{r}{k}\cos\vartheta,\ y=k\ sen\frac{v}{k}=k\ sen\ \frac{r}{k}sen\,\vartheta$$

$$\text{e}\qquad z=\cos\frac{r}{k},$$

coordenadas-ponto de Weierstrass, dá para ligação das tres coordenadas homogéneas a expressão

$$x^2+y^2+k^2z^2=k^2 \qquad \text{(A)}$$

Esta expressão permttirá tornar homogénea uma equação em $x, y$ e $z$, e, portanto, susbstituir, quando isso convier, as coordenadas pelas suas razões.

Em geometria hiperbólica teremos, pela substituïção de $k$ por $ik$:

$$x^2+y^2-k^2z^2=-k^2$$

Se $r$ é infinito, o mesmo acontece às coordenadas, mas as suas razões têem limite e verificam a equação:

$$x^2+y^2-k^2z^2=0$$

que será a equação do *Absoluto:* uma cónica real em métrica hiperbólica, uma cónica imaginária em métrica elítica, onde

$$x^2+y^2+k^2z^2=0.$$

É possível introduzindo outras coordenadas (lineares, as primeiras seriam ponctuais) de Weierstrass achar uma cónica, a que satisfazem as coordenadas da linha do infinito, e tal que esta linha lhe seja tangente e que é, pois, o *mesmo Absoluto*, como limite de linhas.

*A distância de dois pontos:* $PP' = d$ será em coordenadas polares $(r, \vartheta)$ e $(r', \vartheta')$

$$\cos \frac{d}{k} = \cos \frac{r}{k} \cos \frac{r'}{k} + \operatorname{sen} \frac{r}{k} \operatorname{sen} \frac{r'}{k} \cos (\vartheta - \vartheta') =$$

$$= zz' + \frac{xx'}{k^2} + \frac{yy'}{k^2}$$

ou por (A)

$$\cos \frac{d}{k} = \frac{xx' + yy' + k^2 zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2 z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + k^2 z'_2}} \quad \text{(B)}$$

e, fazendo

$$xx' + yy' + k^2 zz' \equiv (xx'),$$

poderemos com esta notação de agora falar da distância dos pontos $(x)$ e $(x')$ que será desta forma:

$$\cos \frac{d}{k} = \frac{(xx')}{\sqrt{(xx)} \sqrt{(x'x')}}.$$

Na métrica elítica a distância é, pois, uma função periódica.

Se $d = \frac{\pi}{2} k$, $\cos \frac{d}{k} = o$ e $xx' + yy' + k^2 zz' = 0$,

que é a equação da polar absoluta do ponto $(x', y', z')$, polar em relação à cónica $x^2 + y^2 + k^2 z^2 = 0$, que é, portanto, o *Absoluto*.

Se agora repararmos que a linha recta é representada por uma equação do primeiro grau, nós poderemos representar as rectas não euclidianas por linhas rectas no plano euclidiano e restará, para representar as outras métricas na métrica euclidiana, achar as funções de distância e ângulo (euclidianos), que correspondem a dadas distâncias e ângulos da métrica não-euclidiana.

*É o problema geral da representação das métricas, umas pelas outras, envolvendo o mesmo problema que procuramos resolver: isto é o duma geometria geral, que seja um género com as tres e só tres espécies: euclidiana, hiperbólica e elitica.*

A fórmula (B) da distância dá, para $k \rightarrow \infty$, e tomadas as aproximações:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{k^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{k^2},$$

seja,

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2;$$

fórmula da analítica cartesiana correlativa da definição da *razão-crucial* [1] pela noção euclidiana de segmento ou *distância.*

De modo que a distância euclidiana é uma função da *razão-crucial.*

Vamos agora achar a relação dos *ângulos* com essa mesma razão.

A equação do círculo na notação da analítica, que posemos, será a distância de $(x, y, z)$ ao centro $(x', y', z')$ ou comprimento dum raio a que, no caso actual, pode dar-se a forma geral

$$x^2 + y^2 + z(ax + by + cz) = 0.$$

Esta equação representa uma cónica passando pelos pontos de intersecção da linha $z = 0$ com o par de linhas imaginárias $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$: cada cír-

1 Já veremos o que é êste invariante do grupo projectivo.

culo passa, pois, pelos vértices dêstes pinceis imaginários, que são os *pontos circulares*, ou tem um duplo contacto com o *Absoluto*.

Ora na métrica euclidiana é sabido que o ângulo de duas linhas se pode exprimir em função das duas linhas unindo o ponto de intersecção com os *pontos circulares*.

Seja $y = x \text{ tang } \vartheta$ e $y = x \text{ tang } \vartheta'$ as equações das duas linhas concorrentes na origem, as linhas juntando a origem aos *pontos circulares* serão $y = ix$ e $y = -ix$.

Se designarmos por $u$, $u'$ e $\omega$, $\omega'$ respectivamente as quatro linhas bastará usar a expressão conhecida da razão-crucial para acharmos uma relação do ângulo com uma certa função daquela fórmula.

Ora a *razão crucial*, expressão deduzida dos teoremas da concorrência e colineariedade, que é, em métrica euclidiana [1] e para dois pares de pontos de parámetros $a\ a'$ e $b\ b'$, dada pela expressão:

$$(aa', bb') = \frac{a-b}{a-b'} : \frac{a'-b}{a'-b'}$$

*conserva-se* para as métricas não euclidianas.

Para o nosso caso teremos:

$$\frac{\text{tang } \vartheta - i}{\text{tang } \vartheta + i} : \frac{\text{tang } \vartheta' - i}{\text{tang } \vartheta' + i}$$

ou, por

$$\frac{i - \text{tang } \vartheta}{i + \text{tang } \vartheta} = \frac{i \cos \vartheta - \text{sen } \vartheta}{i \cos \vartheta + \text{sen } \vartheta} = \frac{\cos \vartheta + i \text{ sen } \vartheta}{\cos \vartheta - i \text{ sen } \vartheta} = e^{2i\vartheta},$$

$(u\ u', \omega\ \omega') = e^{2i(\vartheta - \vartheta')}$ e o ângulo $\alpha = \vartheta' - \vartheta =$ $= \frac{i}{2} \log (uu', \omega\omega')$, que é a expressão procurada.

1 Em métrlca euclidiana podem introduzir-se estas condições pelos teoremas de Menelaus e Ceva e acharíamos então os teoremas análogos para a métrica não-euclidiana.

Quando o *Absoluto* é uma cónica real teremos:

$$d = \frac{1}{2}\, ik \log\,(PP',\ XY)$$

sendo $P$ e $P'$ os dois pontos cuja distância procuramos e $x$ e $y$ os pontos em que a linha $PP'$ corta o *Absoluto*. Escolhendo convenientemente a unidade de ângulo

$$\alpha = \frac{1}{2}\, i \log\,(pp', xy)$$

sendo $pp', xy$ as duas linhas concorrentes definidas pela razão crucial.

Para o caso do *Absoluto* imaginário basta substituir $ik$ por $k$.

De modo que toda a métrica se reduz às transformações da geometria projectiva que conservam distâncias e ângulos e são, como acabamos de vêr, as que conservam o *Absoluto*.

São as relações gerais para a distância dos pontos $P$ e $Q$ e para os ângulos das linhas $p$ e $q$:

$$d = (P, Q) = K \log\,(XY, PQ),\ \alpha = (pq) =$$
$$= k \log\,(xy,\ pq).$$

São as fórmulas gerais, que, fixando o *Absoluto*, vão, limitando o número de métricas possíveis, resolver o problema que directamente queríamos resolver, tendo deixado de caminho esclarecidos outros problemas, como os da *subordinação da métrica à geometria projectiva e a tradução de cada forma métrica nas outras formas.*

É claro que não consideramos espécies distintas as formas que resultam da simples mudança de unidade: estas são *individuos* geométricos, conseqüentemente indefinidos em número de possibilidades.

O que faz a distinção é a consideração dos valolores reais, infinitos ou imaginários para as constantes.

Parece, pois, que teríamos *nove espécies* métricas distintas.

Mas é possível reduzir êsse número, atendendo a que a constante para os ângulos deve ser $k = \frac{i}{2}$.

Se, com efeito, pomos a condição que a medida dos ângulos seja a mesma que na métrica ordinária (o que deve ser atendendo ao perfeito determinismo da perpendicularidade), as tangentes dum ponto real para o *Absoluto* são imaginárias, $(pq, xy)$ será imaginário e portanto também o será k.

Ora, quando $p$ e $q$ são conjugados em relação ao *Absoluto*, são perpendiculares e a unidade de ângulo é tal que nesse caso o ângulo é $\frac{\pi}{2}$ e k é $\frac{i}{2}$.

Portanto ficam apenas *tres casos* possíveis para as diferentes *espécies* de métricas.

São os que correspondem a *k real*, *k imaginário* e *k infinito*.

Seja o *Absoluto* uma *cónica real*, métrica *hiperbólica*; o *Absoluto* uma *cónica imaginária*, métrica elítica; o *Absoluto degenerado* em duas linhas coïncidentes e dois pontos imaginários, métrica *parabólica* ou *euclidiana*.

No caso euclidiano surge uma aparente dificuldade que imediatamente desaparece se nos lembrarmos da sua situação privilegiada de limite e por considerações de limites levantarmos a aparente dificuldade.

É o caso que a distância para a coincidência dos pontos $X$ e $Y$ *aparece* indeterminada; pois $k$ é infinito e a razão $(PQ, XY)$ é nula.

Fazendo $PY = PX + \varepsilon$, sendo $\varepsilon$ infinitamente pequeno e desprezando as suas potências vem:

$$(PQ) = K\varepsilon\left(\frac{1}{QX} - \frac{1}{PX}\right).$$

Façamos tender $k$ para o infinito e $\varepsilon$ para zero de modo que $k\varepsilon$ tende para o limite $\lambda$, será

$$(PQ) = \lambda\,\frac{PQ}{PX.\,QX}.$$

Escolhendo o ponto $\varepsilon$ de modo que $(P\varepsilon)$ seja a unidade de distância teremos $(PQ) = (XP, \varepsilon Q)$ e medindo da origem $P$:

$$(0Q) = (X0, \varepsilon Q) = (0\,\infty, Q1)$$

e $(01) = 1$, que é a medida euclidiana.

A passagem do plano para o espaço faz-se aplicando as doutrinas expostas e considerando uma *quádrica real* que dá a métrica *hiperbólica*, uma *quádrica imaginária* dando a métrica *elítica* e uma *quádrica degenerada* que dá a geometria *euclidiana*.

As métricas como sistemas lógicos estão, portanto, perfeitamente garantidas; de caminho um problema de grande alcance filosófico e até scientífico, e que vem a ser o da *representabilidade* das métricas não-euclidianas, foi também, pelo menos aparentemente, resolvido.

### REPRESENTABILIDADE, COERÊNCIA LÓGICA E VERDADE DAS MÉTRICAS NÃO-EUCLIDIANAS

Estão estabelecidas as tres métricas e nenhuma delas apresenta sôbre as outras mais que a diferença de ser uma construção lógica diferente.

As noções basilares são diferentes, mas qualquer dos edifícios apresenta a mesma harmonia lógica.

Contra as métricas não-euclidianas levantaram-se tres ordens de suspeitas.

A sua irrepresentabilidade, a possibilidade da contradição lógica vir a aparecer e correlativamente com a irrepresentabilidade a sua falta de verdade, sendo, o não-euclidianismo apenas uma coerente fantasia intelectual.

A representabilidade apresenta dois aspectos diferentes, conforme a referimos à imaginação ou ao entendimento.

Se é no entendimento, é representável tudo o que ofereça uma matéria à inserção da actividade de pensamento.

O pensamento existe independentemente das palavras, mas precisa delas para se actualizar e quando o faz sem palavras é (escola de Wursbourg) com a impressão duma regra, duma direcção, etc.

Há sempre um resíduo sensível em que se *insere* a actividade pensante; mas para êsse papel bastam os sinais de qualquer simbólica.

Sôbre êste ponto de vista, as métricas não-euclidianas são tão representáveis como as outras.

Mas existe um outro critério de representabilidade que vem a ser o critério da imaginação intuïtiva que anda ligado com um correspondente critério de verdade.

Para êste critério a verdade é a justaposição possível do objecto e da imagem mental, de modo que deve haver um objecto geométrico e será verdadeira a geometria que der a imagem mental coïncidente com êsse objecto.

Quando o *objecto* é forma do sujeito, como em Kant, a verdade perfeita (de que as verdades empíricas são aproximações) será não coïncidência do objecto com a imagem mental, mas a construção da imagem mental no quadro da *forma sensível* do sujeito.

Veremos, na crítica filosófica, a importância dêste ponto de vista de Kant fundando os chamados *juízos sintéticos a priori* que Poincaré pretende restaurar na aritmética, depois de os derrotar na geometria.

Esta representabilidade, se existisse, seria a demonstração da verdade de qualquer das métricas, umas em face das outras.

Portanto só seria *representável* e *verdadeira* a que desse imagens coïncidentes com os objectos.

Ou seria cada métrica tanto mais verdadeira quanto mais se aproximasse de seus objectos.

Ora, com efeito, nós podemos ir substituindo aos objectos da percepção os objectos ideais da sciência, nem de outro modo se compreenderia a essência do conceito e demais transições psicológicas.

As percepções scientíficas, evidentemente mais acessíveis ao público extra-scientífico do que as teorias, são, no entanto, já embebidas de tanto pensamento que pela sua subtilidade e orientação confundem e perturbam o espírito desprevenido.

O conceber é como nascente que se derrama sôbre o perceber e o modifica até êsses exemplos clássicos dos paradoxos psicológicos que juízos inconscientes explicam e até às avaliações de distâncias por uma geometria implícita no imediato da atenção perceptional.

De modo que, como nos parece com efeito termos a percepção da linha recta, há, em nós, um protesto desta *percepção-scientífica* (permitam o termo) contra a identidade da geometria euclidiana perante as outras como representativas de objectos da *percepção-scientífica*.

É esta percepção que é o concreto do que Kant encontrou para a sua hipótese das formas apriorísticas.

Kant tinha deante de si certos problemas a resolver e tinha em si esta *percepção* que finge muito bem de sciência: encontrou *na aproximação desla certeza com aqueles problemas a chave de toda a sua Crítica.*

Tanto assim que Renouvier e tantos outros não deixam de dar ao euclidianismo um papel primacial, supondo que o *não-euclidianismo* sempre o implica e postula.

Veremos que tudo isso se explica; mas exactamente, pela maior facilidade na direcção da abstração ou por maior profundidade desta, é, ao contrário, na concepção, e não na intuição, que está a singularidade da métrica euclidiana.

São igualmente representáveis pelo pensamento intelectual e igualmente representáveis pela imaginação scientífica, visto que é sempre possível traduzir as formas de qualquer métrica em formas da métrica euclidiana.

As noções *primitivas* duma métrica aparecerão como noções secundárias ou *derivadas* das outras métricas; mas será sempre possível encontrar uma *forma comum* que relacione e *traduza.*

É o que já fizemos incidentalmente, achando as funções de distância e ângulo, que ligam as tres métricas, visto que para $k$ imaginário tínhamos a métrica elítica traduzível em esférica, que como vimos, no plano, tem as mesmas propriedades intrínsecas da superfície esférica no espaço euclidiano.

Mas para o espaço esférico?

Os *planos* serão representados por esferas cortando ortogonalmente uma esfera fundamental, as *esferas próprias* pela esfera que não corta a esfera fundamental, a *horisfera* pela esfera que apenas toca a esfera fundamental e a *superfície-equidistante* pela esfera que corta a esfera fundamental.

É o que se chama uma representação *conformal* das métricas não-euclidianas.

Nesta representação o horiciclo será dado pelo círculo que apenas toca a esfera fundamental: os horiciclos duma horisfera, como os círculos dum plano que representem rectas euclidianas (inversão), passam todos pelo mesmo ponto da esfera.

No plano as tres métricas podem ser representadas umas pelas outras por um sistema de círculos cortando ortogonalmente um círculo [1] dado.

A teoria da representação *conformal* dá-nos, de resto, um novo processo para achar a *função-distância*.

Seja, com efeito:

$$x^2 + y^2 + 2\,gx + 2\,fy + c = 0$$

a equação de círculos que representem linhas rectas (geodésicas).

Como elas serão inteiramente [2] determinadas por dois pontos, teremos

$$2\,gg' + 2\,ff' = c + c',$$

que é a condição para cortarem ortogonalmente o círculo

$$x^2 + y^2 + 2\,y'x + 2\,f'y + c' = o$$

Êste círculo é imaginário na métrica elítica, é real na métrica hiperbólica e pode reduzir-se a um ponto quando a *curvatura é infinita*.

Fazendo, *nêste* caso uma *inversão* a partir dêste ponto, os círculos transformam-se em linhas rectas — *é o caso euclidiano.*

Quando as linhas rectas são representadas por círculos, os círculos são também representados por círculos.

Se $ABC$ é então um círculo representando um

1 É preciso considerar como *um só* o par de pontos inversos em relação ao círculo dado.

2 Na métrica esférica consideram-se os dois polos como um só ponto.

círculo não-euclidiano e $O$ o ponto que representa o seu centro, os raios $OA$, $OB$, $OC$, cortando ortogonalmente $ABC$ e o círculo dado, são ***distâncias não-euclianas iguais.***

Basta, pois, procurar a função das posições de $O$ e $A$ que deve representar as distâncias entre os pontos seus correspondentes.

Para isso procuremos a transformação que, conservando os ângulos, muda os círculos em círculos e o círculo dado, fundamental, nêle mesmo.

A equação dum círculo:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

será, usando os números complexos

$$z=x+iy, p=g+if \text{ e } \bar{z}=x-iy, \bar{p}=g-if:$$

$$z\bar{z}+\bar{p}z+p\bar{z}+c=0 \qquad (\alpha)$$

Uma transformação da forma

$$z=f(z') \text{ e } \bar{z}=f(\bar{z}')$$

é ***conformal*** e para que deixe inalterada a equação $(\alpha)$ terá de ser da forma

$$z=\frac{a'z'+b}{cz'+d}, \ \bar{z}=\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}'+\bar{d}}, \text{ onde } ad \lesseqgtr bc.$$

A transformação conserva a razão crucial e chama-se *homográfica.*

Quando o círculo fundamental é $x^2+y^2+\mathrm{k}=0$ ou $z\bar{z}+\mathrm{k}=0$, a fórmula é

$$z=\frac{\bar{a}z'-\mathrm{k}\bar{b}}{bz'+a} \qquad (\beta)$$

Considerando agora as equações que dão a ***inver-***

*são* em relação a dois círculos cortando ortogonalmente o círculo fundamental, é fácil de ver que êles serão da forma de ($\beta$); logo a transformação (ou deslocamento) que procuramos é equivalente a um par de inversões em dois círculos que cortem ortogonalmente o círculo fundamental.

Nesta transformação ou deslocamento há sempre dois pontos que se não transformam.

Seja, com efeito $z = z'$

por ($\beta$) $bz^2 + (\bar{a} - a)z + k\bar{b} = 0,$

substituindo $z$ por $\frac{k}{z'}$.

a equação será também quadrática.

Os dois pontos são inversos em relação ao círculo fundamental.

Procuremos agora a função dos números complexos $z_1$ e $z_2$, coordenadas dos dois pontos $P$ e $Q$, que ficam invariantes na transformação ou deslocamento.

Os dois pontos determinam um só círculo cortando ortogonalmente o círculo fundamental em dois pontos $X$ e $Y$, êste círculo é a linha recta juntando $P$ e $Q$ e $X$, $Y$ são os seus pontos do infinito.

Nestas condições $X$ e $Y$ são fixos para o nosso deslocamento.

A razão crucial dos pontos, que fica constante, será $(z_1 z_2, x y)$, sendo $x$ e $y$ as coordenadas de $X$ e $Y$.

Suponhamos agora que a distância

$$(PQ) \text{ é } (PQ) = f(z_1, z_2),$$

que terá de satisfazer à condição

$$(PQ) + (QR) = (PR),$$

sendo $R$ o terceiro ponto da linha com $z_3$ correspondente a $R$, ou

$$f(z_1, z_2) + f(z_2, z_3) = f(z_1 z_3),$$

que vai determinar a forma da função.

Ora

$$(z_1 z_2, xy) = \frac{z_1 - x}{z_1 - y} \times \frac{z_2 - y}{z_2 - x} = \frac{PX}{PY} \times \frac{QY}{QX} \text{(razão crucial)};$$

diferenciando em relação a $z_1$,

$$f'(z_1 z_2) \frac{QY}{QX} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{PX}{PY}\right) = f'(z_1 z_3) \frac{RY}{RX} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{PX}{PY}\right)$$

e

$$\frac{f'(z_1, z_2)}{f'(z_1, z_3)} = \frac{(z_1 z_3, xy)}{(z_1 z_2, xy)}$$

ou

$$f(z_1, z_2)\, f'(z_1, z_2) = (z_1 z_3)\, f'(z_1, z_3) = C$$

donde integrando

$$f(z_1, z_2) = C \log (z_1 z_2, xy) + C'$$

e, escolhendo as constantes, atendendo a equação que determina a função e atendendo a que no espaço hiperbólico o círculo fundamental é real:

$$d = (PQ) = k \log (PQ, XY).$$

Todas ás tres métricas são representáveis e são a subida da representatividade da imaginação para a pura representação intelectual, são a análise daquela forma percepcional das extensões, que já é embebida em conceptualização, para do seu conteúdo parcialmente harmónico extrair um sistema perfeitamente harmónico de pensamento.

A noção intuïtiva de espaço não é simplesmente de ordem psicológica [1], mas essencialmente de ordem sociológica [2].

O espaço intuïtivo longe de ser, como Kant o afirma, uma forma da sensibilidade, é diferente em cada indivíduo, consoante o *grupo* de cultura a que pertence; êsse espaço intuïtivo é menos homogéneo que o espaço geométrico e foram certamente as suas qualificações excessivas e erradas, que, impedindo as qualificações scientíficas, levaram à solução dum espaço suficientemente homogéneo, onde podessem caber as novas determinações scientíficas.

O problema dos antípodas é, em vivo e concreto exemplo, uma magnífica ilustração do que dissemos.

De modo que não é a representabilidade da imaginação que pode dar maior ou menor valor a qualquer das tres métricas, mas sim a zona daquela *suficiência de homogeneidade* de que falamos.

Esta homogeneidade tem como limite ideal dum lado a pura identidade e do outro a pura experiência.

A coïncidência do *pensar* com o *ser* só poderia dar-se numa consciência de que o Universo fôsse a própria experiência interna.

As consciências limitadas, ainda que desenvolvendo teoremàticamente a fórmula da sua essência como em Leibnitz, *receberam* essa fórmula e assistiriam com novidade ao aparecimento das suas conseqüências.

Porque o homem é limitado e a sua experiência é sempre um segmento de uma Experiência mais extensa e de maior número de dimensões, é que o seu pensamento é intermediário entre a pura liberdade

1 Aqui aparece a tese, com a qual aliás discordamos, de Roberty em situação de favor: a psicologia é uma sciência concreta de que a sociologia é a sciência abstracta correspondente.

2 Vêi os estudos de Durckeim e da sua escola sôbre as categorias sociais e os estudos destas nos povos primitivos.

do seu ser pensante e as *ligações*, pela experiência, dêsse pensamento com uma mais vasta realidade solidária [1].

Em sciência essa posição do pensamento humano é entre a afirmação da sua liberdade na criação de puras formas a servirem de molde a múltiplas experiências e o ajustamento dessas formas a uma dada experiência, que seja a mais completa experiência actual.

Entre as produções espontâneas da sua actividade e sujeição dessa actividade às linhas da vida experimental atual.

A homogeneidade da sciência hesita entre êstes dois limites, tendendo para a melhor posição de equilíbrio: é o que desde a nossa primeira tese chamamos o princípio de máxima racionalização [2].

De modo que o problema da certeza e da verdade, que procuramos elucidar em face da actividade scientífica, aparece-nos aqui como o problema da compatibilização ou equilíbrio móvel entre a homogenização da Razão, ou certeza, e a compreensão da Experiência ou verdade: seja a própria face do que chamamos a Razão experimental.

Qual das geometrias é a mais certa e qual é a mais verdadeira?

Eis o que Poincaré responde pela célebre teoria das convenções *cómodas*.

1 Estas considerações são apenas destinadas a ficarem como marcos apontando às nossas conclusões filosóficas: a crítica scientífica que vamos fazendo é independente delas, e é, antes, o seu melhor fundamento.

2 Como a actividade do juízo está sempre cercada e enleiada nos conceitos criados, esta máxima racionalização longe da Experiência tenderia para a inteira obediência a uma Razão, catálogo de certas categorias sociais; seria uma Razão autoritária, realística. Assim é que a Experiência solicitando o juízo acorda a liberdade.

Esta *comodidade* é exactamente o máximo de verdade no máximo de harmonia ou certeza lógica.

Mas isto são questões metafísicas que deixaremos para o capítulo seguinte.

O que aqui apenas queremos destacar é a qualidade da certeza e da verdade geométricas.

A certeza é igual em todos os sistemas de geometrias e da mesma qualidade: é uma certeza condicional.

A geometria é um sistema *hipotético-construtivo:* suponhamos os sêres $z, y, z$, etc., e que entre êsses sêres há as relações $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., digo que há também entre êles todas as relações, que lògicamente posso *construir* a partir das hipóteses originárias.

Isto para a *certeza.*

Para a *verdade:* se nos isolamos dentro da geometria diremos que a verdade coincide com a certeza, se preguntamos das melhores ou peores relações das entidades $x, y$ e $z$, etc., com o mundo da experiência, saímos da geometria para as suas relações com outras sciências, porque só o todo scientífico pode marcar as preferências explicativas das diferentes hipóteses.

As sciências *hipotético-construtivas,* e veremos ser êste o ideal para que tendem todas as sciências, levam todo o seu empirismo, implícito nos sêres ideais que postulam e suas hipotéticas relações originárias.

Esta é a parte histórica do valor de cada sábio, que foi erguendo o edifício scientífico, até que chegue o momento de condensar êsse empirismo nos princípios e sêres originais e fazer dedutivamente a exposição scientífica.

Mas esta parte empírica não é unìvocamente determinada, pois, como veremos, tudo isso se pode reduzir a definição de grupos e há sempre, para cada grupo, indefinidos grupos isormórficos possíveis que o possam substituir.

A preferência entre êsses grupos terá de fazer-se pelo critério de máxima simplicidade ou máximo de homogéneo possível.

De modo que é ainda êste o único critério possível dentro da geometria para julgar da sua maior ou menor verdade. Por outro caminho chegamos, pois, de novo à conclusão que verdade e certeza são correlativos dentro de cada sciência.

E assim tem de ser, visto que é no ponto móvel do equilíbro entre o idêntico lógico e o diverso experimental, que estão a verdade e a certeza scientíficas.

*A certeza geométrica é, como dissemos, uma certeza condicionada e a verdade é a condição dessa certeza.*

Se há sêres obedecendo às relações $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc. êles terão também as relações *1, 2, 3*, etc. lògicamente derivadas.

No «se há» está implícita a verdade e no «terão também» reside a certeza.

«Se não há» tais sêres, a certeza fica, mas meramente formal e sem vida.

Aquele «se há» é o ponto de inserção de toda a tolerância social, que os séculos foram conseguindo, êste é o requerimento feito ao *sacratismo* social, ao conformismo opressivo, pelas consciências inovadoras, inquietas e de mais larga convivência experimental.

Vejamos directamente a estrutura lógica da geometria.

É modêlo o livro, sôbre os princípios fundamentais da geometria, de Hilbert.

*Convenção.* Sejam tres sistêmas diferentes de sêres: os *pontos* $A, B, C \ldots$; as *rectas* $a, b, c \ldots$, os *planos* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$.

Os primeiros são os *elementos* da geometria linear;

êstes e os segundos são os *elementos* da geometria plana e os tres os *elementos* da geometria do espaço.

Suponhamos que êsses sêres têem entre si as relações definidas pelos *axiomas* da *geometria*.

Sejam êsses axiomas divididos em cinco grupos assim chamados:

Axiomas de *associação*, axiomas de *distribuição*, axioma das *paralelas*, axiomas de *congruência*, axioma de *continuidade*, a que pode juntar-se o axioma da *integridade*.

*Axiomas de associação:*

Dois pontos distintos $A, B$ determinam sempre uma recta $a$; e $AB = a$ ou $BA = a$.

Dois pontos distintos quaisquer duma recta determinam essa recta, e sôbre qualquer recta há sempre pelo menos dois pontos.

Se $AB = a$ e $AC = a$ e $B \lesseqgtr C$ será $BC = a$.

Tres pontos não coliniares determinam sempre um plano $\alpha$, $ABC = \alpha$.

Tres pontos quaisquer $A, B, C$ dum plano $\alpha$, não coliniares, determinam êsse plano $\alpha$.

Quando dois pontos $A$ e $B$ duma recta $a$ estão no plano $\alpha$, o mesmo acontece a todos os pontos de $a$.

Quando dois planos $\alpha$ e $\beta$ têem um ponto comum, $A$, terão ainda outro ponto comnm, $B$, pelo menos.

Sôbre qualquer plano há pelo menos tres pontos não coliniares, e, no espaço, há pelo menos quatro pontos não coplanares.

Êstes axiomas são da geometria projectiva.

*Axiomas de distribuição:*

Sendo $A, B$ e $C$ tres pontos em linha recta, se $B$ está entre $A$ e $C$, estará também entre $C$ e $A$.

Se $A$ e $C$ são dois pontos duma recta, há pelo menos um ponto $B$ entre $A$ e $C$ e um ponto $D$ tal que $C$ fique entre $A$ e $D$.

Se $A, B, C$ são tres pontos duma recta, um só deles fica entre os outros dois.

Quatro pontos $A, B, C$ e $D$ duma recta podem sempre ser distribuídos de tal maneira que $B$ fique entre $A$ e $C$ e também entre $A$ e $D$ e que $C$ seja entre $A$ e $D$ e também entre $B$ e $D$.

Sejam $A, B, C$ tres pontos não coliniares e $a$ uma recta no plano $ABC$, que não passa por nenhum dêstes pontos $A, B, C$; se a recta $a$ passa por um ponto do segmento $AB$, ela passará por um ponto do segmento $BC$ ou do segmento $AC$.

Êstes axiomas são ordinais, são axiomas da *Analysis Situs.*

*Axioma das paralelas:*

Num plano $\alpha$, por um ponto $A$ fora da recta $a$ pode-se sempre tirar *uma recta e uma só* que não corte a recta $a$: é a paralela a $a$ por $A$.

É o axioma específico da métrica euclidiana.

*Axiomas de congruência:*

Sejam $A, B$ dois pontos duma recta $a$ e $A'$ um ponto dessa mesma recta ou de outra $a'$, pode-se sempre na recta $a'$ dum dado lado de ponto $A'$ encontrar um só ponto $B'$ tal que o segmento $AB$ seja o congruente do segmento $A'B'$.

$$AB \equiv A'B', AB \equiv AB \equiv BA.$$

Se

$$AB \equiv A'B' \text{ e } AB \equiv A''B'', \text{ será } A'B' \equiv A''B''.$$

Sejam na mesma recta $a$ dois segmentos $AB$ e $BC$ sem pontos comuns e na mesma recta ou em $a'$ $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos sem pontos comuns, se

$$AB \equiv A'B' \text{ e } BC \equiv B'C' \text{ será } AC \equiv A'C'.$$

Seja no plano $\alpha$ um ângulo $(h, k)$ dado e no plano

$\alpha'$ uma recta $a'$ com um lado marcado. Seja $h'$ uma semi-recta sôbre $a'$ e contada do ponto $O'$ desta recta.

No plano $\alpha'$ existirá uma só semi-recta $k'$ tal que o ângulo $(h,k)$ seja o congruente do ângulo $(h',k')$ e que todos os pontos do interior do ângulo $(h',k')$ sejam do lado marcado de $a'$.

$$(h,k) \equiv (h',k') \text{ e } (h,k) \equiv (h,k) \equiv (k,h).$$

Se

$$(h,k) \equiv (h',k') \text{ e } (h,k) \equiv (h'',k'')$$

será

$$(h',k') \equiv (h'',k'').$$

Nos triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ se $AB$ e $A'B'$, $AC$ e $A'C'$ são congruentes e igualmente o são os ângulos $BAC$ e $B'A'C'$ também o serão, dois a dois, os outros ângulos.

*Axioma da continuidade:*

Seja $A_1$ um ponto qualquer sôbre a recta $a$ entre $A$ e $B$, sejam $A_2, A_3, A_4 \ldots.$ tais que $A_1$ fique entre $A$ e $A_2$, $A_2$ entre $A_1$ e $A_3$, etc. e tais que os segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots.$ sejam iguais, [1] entre si. Na série dos pontos $A_2, A_3$, etc. há sempre um ponto $A_n$ tal que $B$ fique entre $A$ e $A_n$.

Êste axioma, conhecido por axioma de Arquimedes, é um axioma de ordem que permite a introdução de coordenadas.

*Axioma da integridade de Hilbert:*

Os elementos da geometria formam um sistema de seres, que, conservando todos os axiomas, não é susceptível de maior extensão.

Com a combinação dêstes axiomas é possível cons-

1 Podemos definir a igualdade pela congruência.

truir várias geometrias visto que *não sendo contraditórios*, (o que prova a possibilidade de uma) são *independentes*.

Hilbert demonstra a *não-contradição* dêstes axiomas reduzindo o seu grupo, ou sistema, à aritmética dum certo domínio Ω de números algébricos.

A independência demonstra-se pelo processo de construir uma geometria, onde permaneçam todos os axiomas, menos o axioma em questão.

Assim são possíveis várias geometrias, embora só tres espécies de métricas: dadas pelo excesso, defeito ou igualdade a dois rectos da soma dos ângulos do triângulo.

Como se vê a geometria é inteiramente um sistêma *hipotético-construtivo* e a indeterminação está em que há realmente muitos sêres que satisfazem às condições originárias; se há, com efeito, um grupo de seres definidos pelos axiomas, há mais de um, isto é, os sêres originários são *equìvocamente* definidos pelos axiomas basilares.

Com o que o sábio nada tem, porque dirá que, tendo achado as relações funcionais que possam abranger mais que um sistema de sêres reais, forneceu um instrumento geral de possível aplicação indefinida.

Preguntar agora qual das tres métricas é mais certa é simplesmente absurdo, pois os *axiomas* construtivos são independentes.

Preguntar qual é a mais verdadeira, seria dobrar ociosamente a pregunta se apenas falássemos de coerência lógica.

¿O que significa então a pregunta da verdade das diferentes geometrias?

Isto: ¿os sêres ideais e os axiomas basilares, que os definem, como são escolhidos?

Ninguém se lembrou ainda de dizer que a sua escolha é arbitrária, senão para frizar o indeterminismo *parcial* que havia nessa escolha, em face da velha doutrina scientífica de que a sciência partia do estudo das cousas acidentais visíveis para a descoberta das cousas essenciais invisíveis.

Poincaré, que, a despeito duma linguagem por vezes infeliz, é um profundíssimo espírito, guardava aqui a realidade ou experiência, que toda a sciência leva em si, na bela teoria das convenções cómodas, ou antes, no reconhecimento de que estas convenções são sugeridas, mas não impostas pela experiência.

É o que acontece com todas as sciências, como veremos, preferindo nós a teoria da máxima racionalização, que já exposemos [1], que indica o caminho, sem o impôr: o caminho e o motivo, porventura metafísico, daquela sugestão.

O mínimo [2] *quantum* de experiência e realidade dos elementos e axiomas basilares é a origem da verdade implícita de cada sciência.

A sciência é uma livre especulação desinteressada, é a construção estética que vimos definindo; mas as criações dêsse desinteresse têem sempre de *contactar*, por um ou mais pontos, as percepções scientíficas, que são idealmente aquelas que se possam reduzir ao gráfico dum aparelho.

E a sciência que, sendo condicionalmente *certa*, porque é um sistema hipotético-construtivo, será duma inútil verdade formal e caprichosa se não atingir o *contacto percepcional* que possa substituir ao «se ha sêres $a$, $b$, $c$, etc.», que chamaremos sistema ($A$), esta outra afirmação, dentro das aproximações da experiência: «as conseqüências $p$, $q$, etc., do sistema ($A$) são aplicáveis a um sistema de sêres $a'$, $b'$, $c'$, etc., que,

1 «O Criacionismo», 1912. Tese de concurso para professor da Faculdade de Letras de Lisbôa.

2 Mínimo, porque as construções scientíficas não são mera lógica formal, mas operações também nascidas na racionalização da experiência.

dentro das aproximações da experiência, posso considerar como os sêres *a*, *b*, *c*, etc.».

É dentro dêste critério que devemos procurar o significado ao problema da verdade geométrica.

Sem a esperança, é claro, de que a experiência venha a *necessitar* essa verdade, pois que, como vimos, ela não entra nos sêres elementares e axiomas basilares com tal *necessidade*.

Não poderia nunca isso aparecer com absoluta necessidade dado o carácter múlti-uno e úni-múltiplo, mas nunca úni-uno das relações do espírito com a realidade.

Haverá sempre o indeterminismo dos grupos isomorfos e, em geometria como em todas as sciências de formalismo matemático, das realidades isométricas.

Aos $a'$, $b'$, $c'$, etc., podem sempre corresponder indefinidos $a^n$, $b^n$, $c^n$, etc., que tenham os mesmos direitos na teoria que os $a'$, $b'$, $c'$, etc.

Os critérios de escolha serão ainda, dentro da função de harmonia [1] e beleza que entra em todo o juízo humano, critérios de sedução estética e nunca de necessidade.

É o máximo de racionalização do empírico percepcional, seja a mais perfeita unidade na mais opulenta diversidade.

Uma primeira ingénua e obstinada lembrança é a de que, dando-nos a realidade a noção de linhas com maior ou menor curvatura, nós poderíamos no limite supôr uma linha de curvatura nula — que seria a recta euclidiana.

Ùnicamente isto é apenas uma sugestão perigosa

1 O que prova que os juízos de valor não são tão inteiramente separados dos juízos de existência como se supõe vulgarmente: o *ser* e o *dever* tocam-se.

Mesmo os sábios criadores são sempre *seduzidos* em suas preferências por tais juízos; vêr Poincaré, Einstein, etc.

da intuição, pois que a curvatura real poderia ser um mínimo, que para nós desempenharia o papel de zero.

Outra viciosa sugestão intuitiva é a que consistiria em supôr, como Lechalas [1], que as rectas tiradas de pontos diferentes e distantes para a mesma estrêla só se encontrariam no mesmo ponto no caso de serem euclidianas.

Visemos dois astros do sistema solar de dois pontos diferentes da terra.

«Se nos limitamos [2] a uma só experiência, os traçados dos dois raios luminosos são apenas sujeitos à condição de terem uma dada tangente nos pontos de observação e de se cortarem num ponto; mas podemos multiplicar os pontos de observação e deveremos impôr a todos os raios a obrigação de convergirem num mesmo ponto, variável sem dúvida no sistema geométrico adoptado, mas único em cada sistema. Ora esta condição não poderá verificar-se sempre: verificando-se na hipótese das rectas euclidianas, não o será com as rectas de Lobatchewski ou de Riemann».

Parece que aqui Lechalas cede à solicitação ingénua de substituir, inconscientemente, o espaço euclidiano aos outros.

As tangentes dos raios luminosos, rectas euclidianas, encontram-se no mesmo ponto; mas o mesmo aconteceria às tangentes às rectas não-euclidianas, porque se as tangentes às primeiras rectas são essas próprias rectas, também as tangentes às rectas não-euclidianas são, *no espaço não-euclidiano*, essas mesmas rectas não-euclidianas.

Só supondo estas rectas não-euclidianas como

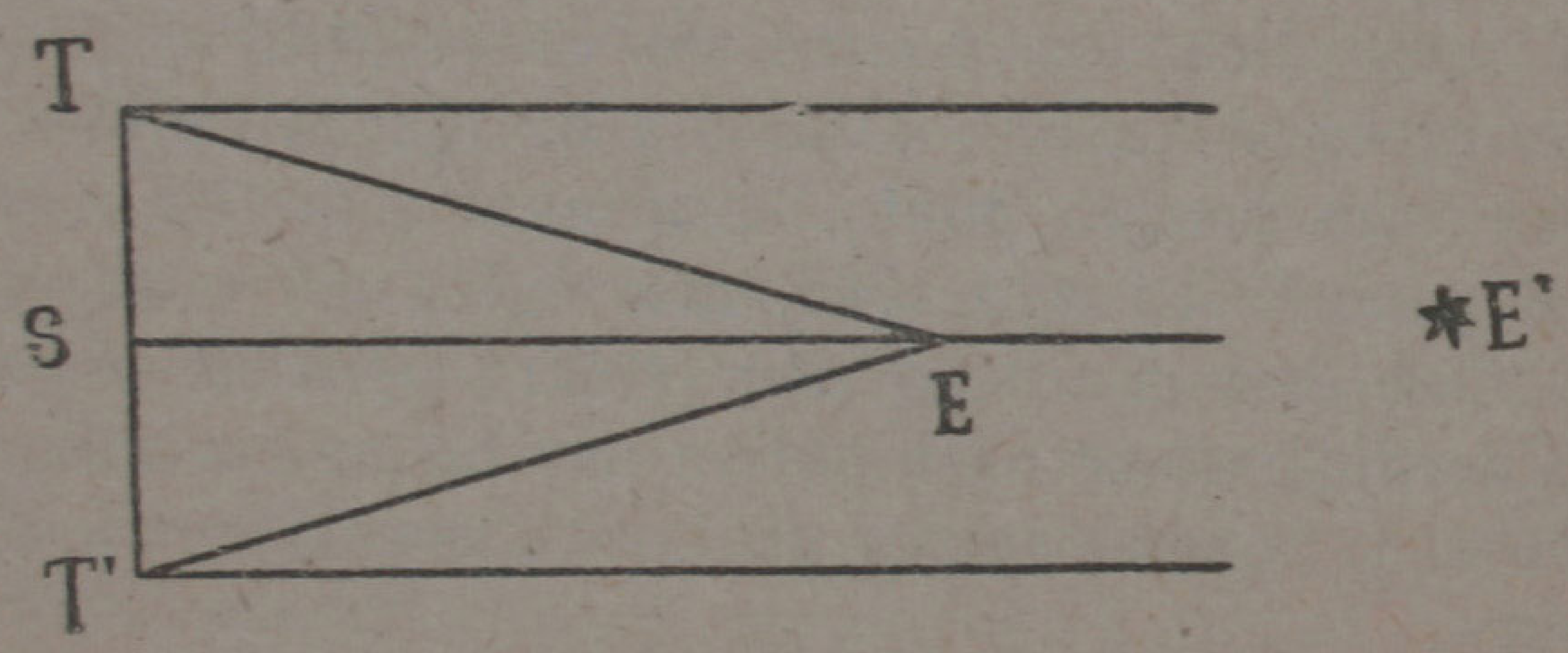
1 «Étude sur l'Espace et le Temps», 2.ª edição.
2 Lechalas, op. cit., pg. 183.

curvas do espaço euclidiano é que as suas tangentes se não encontrariam no mesmo ponto.

Já Gauss apelava para a determinação experimental das constantes espaciais e o seu discípulo Scheweikart chamava ao sistema não-euclidiano, que estudou, «Geometria astral» e foi por Gauss solicitado a fazer medidas de triângulos astronómicos.

Vejamos a melhor forma de pôr a experiência, que nos parece a do compêndio de métrica não-euclidiana de Sommerville.

Consiste esta forma na comparação das paralaxes determinadas pelos dois métodos, o directo e o de Bessel.




Seja $E$ uma estrêla, $T$ e $T'$ duas posições da terra na sua órbita e $S$ o sol, $SE$ perpendicular a $TT'$, o ângulo $TES$ é a paralaxe da estrêla.

Mede-se o ângulo $ETS$, a paralaxe será, aplicando a geometria euclidiana, $\frac{\pi}{2} - ETS$.

O método de Bessel consiste em comparar a posição de $E$ com outras estrêlas mais longínquas.

Seja $S'$ considerada como no infinito: então, aplicando a métrica euclidiana, será $TE'$ paralela a $SE$ e iguais os ângulos $SET$ e $ETE'$.

Mas em métrica hiperbólica o ângulo $ETE'$ será o ângulo de paralelismo para a distância de $R$, raio da órbita terrestre.

É a hipótese do ângulo agudo de Saccheri, seja $2\vartheta$ a diferença:

$$2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \Pi\,(R)$$

E

$$e^{-\frac{R}{K}} = tang \frac{1}{2} \Pi\,(R) = tang\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) = \frac{1 - tang\,\vartheta}{1 + tang\,\vartheta}$$

donde

$$\frac{R}{K} = log\,\frac{1 + tang\,\vartheta}{1 - tang\,\vartheta}$$

pròximamente

$$2\ tang\ \vartheta.$$

Comparando as duas medidas efectivamente achadas pelos dois processos encontra-se para $2\vartheta$ o valor 0,38" o que dá $\frac{K}{R} = 550000$: a *constante espacial* seria pròximamente meio milhão de vezes o raio da órbita terrestre.

Se oe spaço tem *constante* real, ela é muito grande: o que deixa ainda uma margem de indeterminismo entre a métrica hiperbólica e a euclidiana.

Na métrica elítica uma estrêla deveria ser visível em duas posições opostas a não ser que uma conveniente absorpção da luz o iniba.

Com convenientes absorpções de luz as paralaxes em métrica elítica podem ser para as estrêlas mais afastadas idênticas às da métrica euclidiana ou hiperbólica conforme a absorpção vai até à invisibilidade à distância $\frac{\pi K}{2}$ ou $\frac{\pi K}{4}$.

Sob o ponto de vista experimental parece, pois, que os resultados, sem serem decisivos, dão uma métrica ou euclidiana ou de constante espacial muito grande.

O que de resto devia ser, pois as leis da física, que aplicamos na experiencia, já envolviam a métrica euclidiana.

A possibilidade da construção física com a métrica euclidiana é uma prova experimental desta.

Poincaré separando agora o espaço do comportamento dos corpos físicos fala dum indeterminismo que pareceria radical, pois para verificar a métrica euclidiana teríamos o recurso de modificar as leis do comportamento físico dos corpos.

Mas é claro que isto não seria indefinidamente possível, se entre a métrica do Universo e a da nossa escolha houvesse uma radical disparidade.

*É possível um conjunto, tendenciosamente sistemático, porque as linhas de estrutura do Universo são respeitadas.*

A métrica do espaço físico será, pois, numa primeira aproximação e fora das singularidades a inserir, directamente euclidiana ou não-euclidiana isométrica desta.

Claro está que podendo traduzir-se a linguagem euclidiana em termos não-euclidianos se pode achar o *equivalente derivado* da métrica do espaço físico em termos não-euclidianos; mas isso não retira à métrica euclidiana o valor de *métrica directa* daquele espaço.

Há nesta teoria do dicionário de Poincaré duas partes bem distintas que convém separar.

Poincaré triunfa com toda a facilidade das críticas dos que, como Milhaud, passaram ao lado da questão.

É assim que Milhaud, aliás um pensador sério e por vezes profundo, pensa ingènuamente ter afastado a teoria do dicionário com a seguinte leveza desta crítica.

Supõe a proposição «certos números são ao mesmo tempo ímpares e primos» traduzida pelo dicionário: número = homem, ímpar = vivo, primo = morto.

É claro que dará «certos homens são ao mesmo tempo vivos e mortos» que parece [1] absurda.

Depois diz triunfante: ¿a não-contradição dos teoremas da aritmética provaria a não-contradição dos que lhe correspondem na tradução?

Não, é claro; mas a tradução de Poincaré não é a dum ignorante, mas a de quem *conhece* o que está a traduzir e as bases do dicionário.

E as bases são a *correspondência* ou o isomorfismo dos grupos.

Os sêres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$... definidos pelos axiomas *a*, *b*, *c*... têem as mesmas relações e correspondem-se biúnìvocamente com os sêres *derivados* $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$..., derivados de outros elementos definidos por outros axiomas.

Se Milhaud arranjasse significados para «certos homens, vivo e morto» que *correspondessem* às relações de «certos números, ímpar e primo», então teria feito uma tradução à Poincaré.

Sim, é possível *traduzir;* mas é claro que o traduzido não será o mesmo que o original senão sob o ponto de vista a que se atende: aqui as relações métricas, como, por exemplo, a dos triângulos de hori-

1 Digo *parece* não para me divertir com o leitor, mas para que pense na dificuldade de definir vida e morte, abrangendo tudo o que lhe queremos meter lá dentro.